SÉRIES ENTIÈRES ET ORTHONORMALISATION DE SCHMIDT

TD* 16

par David Blottière, le 23 janvier 2024 à 20h51

SOMMAIRE

§ 1. PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R>0$ *et :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{array} \right.$$

On suppose qu'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbf{N}} \in (D(0,R)\setminus\{0\})^{\mathbf{N}}$ *telle que :*

(H1) *pour tout* $p\in\mathbf{N}$, $f(z_p)=0$ *;*

(H2) $z_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Q1. — Démontrer que tous les coefficients a_n sont nuls (principe des zéros isolés).

§ 2. FORMULE DE CAUCHY

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R>0$ *et :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{array} \right.$$

Q2. — Montrer que :

$$\forall\,(n,r)\in\mathbf{N}\times[0,r[,\quad a_n\,r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-ni\theta}\,\mathrm{d}\theta \qquad [\text{formule de Cauchy}].$$

Q3. — Démontrer que :

$$\forall\,(n,r)\in\mathbf{N}\times]0,r[,\quad |a_n| \leqslant \frac{M_r(f)}{r^n} \qquad [\text{estimée de Cauchy}]$$

où $M_r(f) := \sup\left\{\left|f(z)\right| \,:\, z\in\mathscr{C}(0,r)\right\}$.

Q4. — Soit $r\in]0,R[$. Démontrer que :

$$\forall\, z\in D(0,r),\quad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}-z}\,re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \qquad [\text{formule de Cauchy sur un cercle}].$$

Les valeurs de f *en tout point du disque* $D(0,r)$ *ne dépendent donc que des valeurs de* f *sur le cercle* $\mathscr{C}(0,r)$.

§ 3. Théorème de Liouville

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $+\infty$ *et :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{array} \right.$$

Q5. — Supposons f bornée. Montrer que f est constante (théorème de Liouville).

Q6. — Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $d \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|f(z)| \leqslant |P(z)|$. Démontrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à d.

§ 4. Analyticité de la somme d'une série entière

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{array} \right.$$

Q7. — Démontrer qu'il existe une suite de nombres complexes $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que :

$$\forall z \in D(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

§ 5. Inverse d'une fonction DSE non nulle en 0

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{array} \right.$$

On suppose que $f(0) = 1$.

Q8. — Démontrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de 0.

Q9. — Démontrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0. On pourra raisonner par analyse-synthèse pour déterminer les coefficients b_n du développement en série entière de $\frac{1}{f}$, puis établir que si $0 < r < R$ alors il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad |a_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}.$$

Q10. — Étendre les résultats des questions 8 et 9 au cas où $a_0 \neq 0$.

§ 6. Théorème de d'Alembert-Gauss

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauß. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à $d \in \mathbf{N}^*$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne possède aucune racine dans $\mathbf{C}$.

Q11. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{P(z)} \end{array} \right.$$

est bornée.

Q12. — Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Il existe donc une série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R[$ tels que :

$$\forall z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Q13. — Démontrer que :

$$\forall z \in D(0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Q14. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la fonction :

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ r & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ni\theta} \, \mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

est développable en série entière au voisinage de tout réel $r_0 > 0$.

Q15. — Montrer que $R = +\infty$. On pourra utiliser la formule de Cauchy (question 2).

Q16. — Conclure à l'aide du théorème de Liouville (question 5).

§ 7. Caractère fermé des matrices réelles trigonalisables sur R

Soit un entier $n \geqslant 1$.

Q17. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice trigonalisable sur $\mathbf{R}$. Démontrer que :

$$\exists (P, T) \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{T}_n^+(\mathbf{R}), \quad A = P\,T\,P^\top.$$

Q18. — Démontrer que :

$$\mathscr{T}_n'(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{R}\right\}$$

est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q19. — Démontrer que l'adhérence de :

$$\mathscr{D}_n'(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\right\}$$

égale $\mathscr{T}_n'(\mathbf{R})$.