RÉSULTANTS ET ENTIERS ALGÉBRIQUES

TD* 15

par David Blottière, le 16 janvier 2024 à 18h54

SOMMAIRE

§ 1. RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

Q1. — Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes non constants à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$. L'assertion :

$$A(X) \wedge B(X) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A(X)) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B(X)) = \emptyset$$

est-elle vraie ?

Q2. — Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes non constants à coefficients complexes. L'assertion :

$$A(X) \wedge B(X) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A(X)) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B(X)) = \emptyset$$

est-elle vraie ?

Soient $\mathbf{K}$ *un corps,* $A(X)$ *et* $B(X)$ *deux polynômes non constants à coefficients dans* $\mathbf{K}$, $n := \deg(A(X)) \in \mathbf{N}^*$ *et* $m := \deg(B(X)) \in \mathbf{N}^*$. *On considère l'application linéaire :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{n+m-1}[X] \\ (U(X), V(X)) & \longmapsto & A(X)U(X) + B(X)V(X) \end{array} \right.$$

et M *la matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]$ *et* $\mathbf{K}_{n+m-1}[X]$.

Q3. — Expliciter la matrice $M \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbf{K})$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $A(X)$ et des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_m$ de $B(X)$.

Le résultant des polynômes $A(X)$ *et* $B(X)$ *est défini par :*

$$\mathrm{Res}_X(A(X), B(X)) := \det(M) \in \mathbf{K}.$$

Q4. — Démontrer que :

$$A(X) \wedge B(X) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Res}_X(A(X), B(X)) \neq 0.$$

Soient $A(X)$ *et* $B(X)$ *des polynômes à coefficients rationnels.*

Q5. — Démontrer que le PGCD de $A(X)$ et $B(X)$ dans $\mathbf{Q}[X]$ coïncide avec le PGCD de $A(X)$ et $B(X)$ dans $\mathbf{C}[X]$.

Q6. — Démontrer que $A(X)$ et $B(X)$ ont une racine complexe commune si et seulement si $\mathrm{Res}_X(A(X), B(X)) = 0$.

Q7. — Soit $A(X)$ un polynôme à coefficients complexes. Que caractérise la propriété $\mathrm{Res}_X\left(A(X), A'(X)\right) = 0$?

§ 2. Entiers algébriques

Un nombre complexe α est un entier algébrique s'il existe un polynôme unitaire $P(X) \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Q8. — Soit $\alpha \in \mathbf{Q}$. Démontrer que α est un entier algébrique si et seulement si $\alpha \in \mathbf{Z}$.

Q9. — Les racines de l'unité sont-elles des entiers algébriques ?

Q10. — Soit α un entier algébrique. Démontrer que $-\alpha$ est un entier algébrique.

Soient α, β deux entiers algébriques et :

- $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$ *tel que* $P(\alpha) = 0$;
- $Q(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_1 X + b_0 \in \mathbf{Z}[X]$ *tel que* $Q(\beta) = 0$.

On considère :

$$P(X - Y) \in \mathbf{Z}[X][Y] \subset \mathbf{Q}(X)[Y] \quad \textit{et} \quad Q(Y) \in \mathbf{Z}[X][Y] \subset \mathbf{Q}(X)[Y]$$

et on pose :

$$R(X) := \mathrm{Res}_Y\,(P(X - Y), Q(Y)) \in \mathbf{Q}(X).$$

Q11. — Justifier $R(\alpha + \beta) = 0$.

Q12. — Démontrer que $R(X)$ est à coefficients entiers et calculer son coefficient dominant.

Q13. — En déduire que $\alpha + \beta$ est un entier algébrique.

Q14. — Donner un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont $\sqrt{5} + \sqrt[3]{7}$ est racine.

On pose :

$$S(X) := \mathrm{Res}_Y\left(Y^n P\left(\frac{X}{Y}\right), Q(Y)\right) \in \mathbf{Q}(X).$$

Q15. — Justifier $S(\alpha\beta) = 0$.

Q16. — Démontrer que $S(X)$ est à coefficients entiers et calculer son coefficient dominant.

Q17. — En déduire que $\alpha\beta$ est un entier algébrique.