DÉTERMINANT DE CAUCHY ET UN THÉORÈME DE DINI

TD* 13

par David Blottière, le 10 janvier 2024 à 06h14

SOMMAIRE

§ 1. DÉTERMINANT DE CAUCHY

Soient un entier $n \geqslant 2$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbf{C}^n$ et $(\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_i + \beta_j \neq 0$. On se propose de démontrer que :

$$\left| \left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \right| = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\alpha_i + \beta_j)}.$$

Q1. — Que dire lorsque deux des nombres $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ou deux des nombres $\beta_1,\dots,\beta_n$ sont égaux?

Désormais, nous supposons que les nombres $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont deux à deux distincts et que les nombres $\beta_1,\dots,\beta_n$ sont deux à deux distincts. En outre on pose :

$$F := \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \frac{1}{\alpha_1+\beta_2} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_2} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ \frac{1}{X+\beta_1} & \frac{1}{X+\beta_2} & \cdots & \frac{1}{X+\beta_n} \end{vmatrix} \in \mathbf{C}(X).$$

Q2. — Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que :

$$F = \lambda \cdot \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (X - \alpha_i)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X + \beta_j)}.$$

Q3. — Démontrer que :

$$\lambda = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} \end{vmatrix} \cdot \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (\beta_n - \beta_i)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} (\beta_n + \alpha_j)}.$$

Q4. — Conclure.

§ 2. Un théorème de Dini

Soient des réels a, b tels que $a < b$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ tels que :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f.$$

On suppose que :

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$;*

(H2) *la fonction f est continue sur $[a,b]$;*

(H3) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n \leqslant f_{n+1}$.*

On se propose de démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

Q5. — Donner trois propriétés remarquables de la suite de fonctions $(g_n := f - f_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\alpha_n := \sup\left\{g_n(x) \,:\, x \in [a,b]\right\}.$$

Q6. — Démontrer que la suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et que sa limite α est positive ou nulle.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de compacts non vides de $\mathbf{R}$ (ou d'un espace vectoriel normé quelconque) telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $K_{n+1} \subset K_n$.

Q7. — Démontrer que l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est non vide.

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha > 0$.

Q8. — En considérant, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$K_n := \left\{x \in [a,b] \,:\, g_n(x) \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$$

démontrer que :

$$\exists\, c \in [a,b], \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad g_n(c) \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

et conclure.

§ 3. Matrices à classe de conjugaison bornée

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $C(M)$:

$$C(M) := \left\{P\,M\,P^{-1} \,:\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})\right\} \qquad \left[\textit{classe de conjugaison de } M\right]$$

est bornée.

Q9. — Démontrer que M possède une unique valeur propre.

Q10. — Démontrer que $M = \lambda \cdot I_n$, où λ est l'unique valeur propre de M.

§ 4. Une équation fonctionnelle

Q11. — Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ telles que $f(0) = 0$ et

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

On pourra étudier, pour tout $x \in [0,1[$:

$$M(x) := \sup\left\{\left|f(t)\right| \,:\, t \in [0,x]\right\}.$$