Espaces de Banach

TD* 11

par David Blottière, le 20 décembre 2023 à 03h41

Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall q \geqslant N \quad \left|\left| x_p - x_q \right|\right| \leqslant \varepsilon.$$

L'espace $(E, ||\cdot||)$ est dit « complet » ou « de Banach » si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge.

Q1. — Démontrer qu'une suite convergente d'éléments de E est de Cauchy.

Q2. — Démontrer que la suite $\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ qui est divergente.

L'espace $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ n'est donc pas complet.

Q3. — Démontrer qu'une suite de Cauchy d'éléments de E est bornée.

Q4. — Démontrer qu'une suite de Cauchy d'éléments de E possède au plus une valeur d'adhérence.

Q5. — Démontrer qu'une suite de Cauchy qui possède une unique valeur d'adhérence converge.

Q6. — Démontrer que, si E est de dimension finie, alors E est complet.

Q7. — Démontrer que E est complet si et seulement si toute série de vecteurs de E absolument convergente est convergente.

Q8. — On suppose que E est complet et on considère une application $f\colon E \longrightarrow E$ contractante (i.e. k-lipschitzienne pour un réel $k \in [0, 1[$). Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in E$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l'unique point fixe de f sur E (théorème de Picard-Banach).

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit :

$$\mathscr{B}([a,b], \mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ f \text{ est bornée} \right\}.$$

que l'on munit de la norme :

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{B}([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x)\right|. \end{array} \right.$$

Q9. — Démontrer que l'espace $(\mathscr{B}([a,b],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ est complet.

Q10. — Démontrer que :

$$\mathscr{C}([a,b], \mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ f \text{ est continue} \right\}$$

est fermé dans $(\mathscr{B}([a,b],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$.

Q11. — En déduire que l'espace $\left(\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty\right)$ est complet.