TOPOLOGIE III

par David Blottière, le 28 novembre 2023 à 20h33

TD* 10

Les questions sont extraites de la deuxième épreuve du concours Mines-Ponts 2017 en filière MP.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et la norme euclidienne est notée $|| \cdot ||$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est convexe si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, \dots, a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle enveloppe convexe de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathscr{H}$.

Q1. — Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. Définir une application Φ de $\mathbf{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \Phi(\mathscr{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

Q2. — On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par, pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\left(A^\top B\right)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire). Montrer que le groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

Q3. — Démontrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

Q4. — Démontrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Q5. — Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Q6. — Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.