Topologie II

TD* 9

par David Blottière, le 28 novembre 2023 à 14h50

§ 1. Adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables réelles

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q1. — Démontrer que, pour tout matrice A de :

$$\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{R}\right\}$$

il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

Q2. — Démontrer que l'adhérence de :

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \;:\; A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\right\}$$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$.

§ 2. Un théorème de point fixe

Soient $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, (E, N) un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et K un compact non vide de (E, N).

Q3. — Démontrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in K^{\mathbf{N}}$ qui possède une unique valeur d'adhérence $\ell \in K$ converge vers ℓ.

Soit $f : K \longrightarrow K$ une application telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \implies N(f(x) - f(y)) < N(x - y).$$

Q4. — Démontrer que f possède un unique point fixe.

Q5. — Soit x un point de K fixé et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $x_0 = x$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f.

§ 3. Une condition suffisante d'existence d'un minimum

Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue telle que $g(x) \xrightarrow[||x||\to+\infty]{} +\infty$, i.e. :

$$\forall A \in \mathbf{R}_{>0}, \quad \exists \alpha \in \mathbf{R}_{>0}, \quad \forall x \in E, \quad ||x|| > \alpha \implies g(x) > A.$$

Q6. — Démontrer que la fonction g possède un minimum.

§ 4. Théorème de Banach-Schauder en dimension finie

Soient $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, (E, N_E), (F, N_F) des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ une application.

Q7. — Si f est continue, l'image d'un ouvert de (E, N_E) par l'application f est-elle nécessairement un ouvert de (F, N_F) ?

L'application f est dite <u>ouverte</u> si, pour tout ouvert U de (E, N_E), $f(U)$ est un ouvert de (F, N_F).

Q8. — Supposons que le $\mathbf{K}$-espace vectoriel F est de dimension finie et que l'application f est linéaire. Démontrer que :

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est ouverte.}$$

§ 5. PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES POLYNÔMES

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geqslant 1$.

Q9. — On suppose, dans cette question, que $P(0)$. Démontrer que :

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0, \quad D(0, \rho) \subset P(D(0, r)).$$

Q10. — Soit K un compact non vide de $\mathbf{C}$. Déduire de la question 9 que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ z & \longmapsto & |P(z)| \end{array} \right.$$

ne peut pas atteindre son maximum en un point intérieur à K.