TOPOLOGIE I

TD* 8

par David Blottière, le 22 novembre 2023 à 04h52

Soit $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

Théorème.— Sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Soit un entier $p \geqslant 2$.

Q1. — Démontrer que la multiplication :

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbf{K})^2 & \longrightarrow & \mathscr{M}_p(\mathbf{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array} \right.$$

est continue.

Q2. — Démontrer que l'ensemble $\mathscr{N}$ des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ est fermé dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{K})$.

Q3. — Déterminer l'intérieur de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{K})$.

Q4. — Démontrer que l'ensemble $\mathscr{D}'_p(\mathbf{C})$ des matrices diagonalisables dans dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{C})$.

Q5. — Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ qui ont une classe de similitude fermée dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$.

Q6. — Démontrer que l'ensemble $\mathscr{U}_p(\mathbf{R})$ des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ possédant p valeurs propres réelles distinctes est ouvert dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$.