Suites numériques

TD* 7

par David Blottière, le 17 octobre 2023 à 21h10

§ 1. Une inégalité liée à la formule de Stirling

Énoncé de l'exercice 1

Démontrer que :

$$n \cdot \ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

et en déduire l'inégalité :

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$$

où $n \in \mathbf{N}^*$.

□

§ 2. Une suite récurrente

Énoncé de l'exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre réels vérifiant $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}.$$

Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, puis donner un équivalent de u_n.

□

§ 3. DA des sommes partielles de la série harmonique

Énoncé de l'exercice 3

Q1. — Démontrer qu'il existe une constante γ telle que :

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Cette unique constante $\gamma \in]0{,}577\,,\,0{,}578[$ est nommée constante d'Euler.

Q2. — Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme.

□

§ 4. LE LEMME DE SOUS-ADDITIVITÉ DE FEKETE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \ : \ k \geqslant n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup(U_n).$$

Q1. — Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, on dit que v est plus petite que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De facon équivalente, on dit aussi que w est plus grande que v.

Q2. — Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n.$$

Q3. — Si $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.

Q4. — Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sous-additive si pour tous i, j dans $\mathbf{N}^*$, on a $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$.

Dans la suite, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

Q5. — Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Démontrer que :

$$u_m \leqslant (q-1)\cdot u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

Q6. — En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbf{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}.$$

Q7. — En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

□