Réduction

TD* 6

par David Blottière, le 30 novembre 2023 à 08h18

§ 1. Groupe multiplicatif d'un corps fini

Énoncé de l'exercice 1

Soit un corps fini $\mathbf{K}$ de cardinal q (puissance de nombre premier).

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

Pour tout diviseur positif d de $q-1$, on note :

$$N(d) := \mathrm{Card}\left(\left\{x \in \mathbf{K}^* \ : \ \mathrm{ord}(x) = d\right\}\right).$$

Q2. — Soit d un diviseur positif de $q-1$ tel que $N(d) \geqslant 1$. Démontrer que $N(d) = \varphi(d)$.

Q3. — En déduire que le groupe $(\mathbf{K}^*, \times)$ est cyclique.

□

§ 2. Densité du groupe linéaire

Énoncé de l'exercice 2

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, il existe une suite $(A_k)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ telle que :

$$A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A.$$

□

§ 3. Exercices issus de l'oral Mines Pont MP 2015

Énoncé de l'exercice 3

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ et :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & a\cdot M + b\cdot M^\top. \end{array} \right.$$

Q1. — Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que Φ soit bijectif.

Q2. — Calculer $\mathrm{Det}(\Phi)$ et $\mathrm{Tr}(\Phi)$.

□

Énoncé de l'exercice 4

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$.

Q1. — Que dire de u si la matrice de u dans toute base est diagonale ?

Q2. — Que dire de u si la matrice de u dans toute base est la même ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Déterminer les couples $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^2$ tels que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & M + \operatorname{Tr}(AM) \cdot B \end{array} \right.$$

soit diagonalisable.

□

§ 4. EXERCICES ISSUS DE L'ORAL X MP 2015

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.

Démontrer que les seuls sous-espaces stables par f sont les $F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$ où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel d'un sous-espace propre.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent et non nul.

Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel stable n'admettant pas de supplémentaire stable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et a un endomorphisme de E.

Q1. — On suppose que a est inversible et qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que a^n est diagonalisable. Démontrer que a est diagonalisable.

Q2. — Donner un contre-exemple lorsque a n'est pas inversible.

Q3. — Démontrer que a est diagonalisable si et seulement si :

$$a^2 \text{ est diagonalisable et } \operatorname{Ker}(a) = \operatorname{Ker}\left(a^2\right).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{K}$ un corps et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On pose :

$$\chi_A = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0.$$

Démontrer que :

$$\operatorname{Com}(A)^\top = (-1)^{n-1} \cdot \left(A^{n-1} + a_{n-1} \cdot A^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot I_n\right).$$

□