ALGÈBRE LINÉAIRE 2

TD* 5

par David Blottière, le 3 octobre 2023 à 14h58

§ 1. FRIANDISES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soient un corps fini $\mathbf{K}$ *de cardinal* q *(puissance de nombre premier) et un entier* $n \geqslant 2$.

Calculer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Déterminer toutes les applications $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ telle que $f(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{Z}^n$.

□

§ 2. EXERCICES ISSUS DES ORAUX CENTRALESUPÉLEC MP 2021

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soient un entier $n \geqslant 3$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q1. — Démontrer que $\mathrm{Com}(A)^\top\, A = \mathrm{Det}(A) \cdot I_n$.

Q2. — Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de A.

Q3. — Résoudre $\mathrm{Com}(A) = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

□

§ 3. EXERCICES ISSUS DES ORAUX MINES-PONTS 2021

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soient E *un espace vectoriel réel de dimension finie,* u *un endomorphisme nilpotent de* E, S *un sous-espace de* E *stable par* u *et tel que* $S + \mathrm{Im}(u) = E$.

Démontrer que $S = E$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Soient E un espace vectoriel de dimension quelconque, et H_1, H_2 deux hyperplans de E.

Démontrer que que H_1 et H_2 sont isomorphes.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

Démontrer que $A^2 = 0$ si et seulement si A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où r est un entier tel que $2r \leqslant n$.

□

§ 4. EXERCICES ISSUS DES ORAUX X MP 2021

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ semblables uniquement à elles-mêmes.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

□

§ 5. EXERCICES ISSUS DES ORAUX ÉNS MP 2021

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $|\mathrm{Det}(A)| = 1$.
On suppose que les valeurs propres complexes de A sont de module différent de 1.

Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

□