Algèbre linéaire

TD* 4

par David Blottière, le 26 septembre 2023 à 20h28

Sommaire

§ 1. Exercices issus des oraux Mines-Ponts 2018

Énoncé de l'exercice 1

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall Q \in \mathbf{C}_n[X], \quad \exists P \in \mathbf{C}_n[X], \quad Q = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P^{(k)}.$$

□

Énoncé de l'exercice 2

Soient un entier $n \geqslant 2$ et u l'application linéaire définie par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{array} \right.$$

Q1. — Déterminer la trace de u.

Q2. — Calculer le déterminant de u.

□

§ 2. Réduction des endomorphismes nilpotents

Énoncé de l'exercice 3

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, u un endomorphisme de E de nilindice $p \geqslant 2$.

Q1. — Démontrer que toutes les inclusions :

$$\{0_E\} \subset \operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right) \subset \ldots \subset \operatorname{Ker}\left(u^{p-1}\right) \subset \operatorname{Ker}\left(u^p\right) = E$$

sont strictes.

Q2. — En déduire que $p \leqslant n$.

Q3. — Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte.

Q4. — Démontrer qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Q5. — Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Déterminer $\operatorname{Vect}(\mathscr{N})$.

□

§ 3. Déterminants et arithmétique

Énoncé de l'exercice 4

Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose :

$$d_{i,j} := \operatorname{Card}\left(\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ k \mid i \text{ et } k \mid j\}\right) \quad , \quad a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad \delta_{i,j} := i \wedge j \quad , \quad \phi_{i,j} := \begin{cases} \varphi(j) & \text{si } j \mid i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q1. — En exprimant la matrice $D := \left(d_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ à l'aide de la matrice $A := \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, calculer $\operatorname{Det}(D)$.

Q2. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$.

Q3. — En exprimant la matrice $\Delta := \left(\delta_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ à l'aide des matrices A et $\Phi := \left(\phi_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, calculer $\operatorname{Det}(\Delta)$. □