POLYNÔMES

par David Blottière, le 19 septembre 2023 à 15h26

TD* 3

§ 1. FRIANDISES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$.

Démontrer que s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbf{R}_n[X]$.

Démontrer que, si P est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, alors P n'a pas deux coefficients nuls consécutifs.

□

§ 2. EXERCICES ISSUS DE L'ORAL X EN FILIÈRE MP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Démontrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}_+, \quad P(x) \geqslant 0$$

alors il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + XB^2$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot X^k$.

Démontrer que, si $a_0 = 1$ et $P(\mathbb{U}_n) \subset \mathbf{R}_+$, alors tous les coefficients de P valent -1, 0 ou 1.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Q1. — Soient $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, $a_n := \mathrm{dom}(P)$, p, q des entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que $\dfrac{p}{q}$ est une racine de P et $d := \mathrm{mult}\left(\dfrac{p}{q}, P\right)$. Démontrer que, q^d divise a_n.

Q2. — En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ est irrationnel.

□