ALGÈBRE GÉNÉRALE

TD* 2

par David Blottière, le 12 septembre 2023 à 21h50

§ 1. FRIANDISES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soit un entier $n \geqslant 3$. On note A_n le noyau du morphisme signature :

$$\varepsilon\colon (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1,1\}, \times).$$

Q1. — Déterminer le cardinal de A_n.

Q2. — Démontrer que le groupe $(A_n, \circ)$ est engendré par les 3-cycles de S_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soient $\mathbf{K}$ un corps (commutatif) fini. On considère le morphisme d'anneaux canonique :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{Z},+,\times) & \longrightarrow & (\mathbf{K},+,\times) \\ n & \longmapsto & n\cdot 1_{\mathbf{K}}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer qu'il existe un nombre premier p tel que $\operatorname{Ker}(f) = p\mathbf{Z}$.

Q2. — Démontrer qu'il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que $\operatorname{Card}(\mathbf{K}) = p^d$.

□

§ 2. EXERCICES ISSUS DE L'ORAL X EN FILIÈRE MP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Q1. — Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini. Déterminer le produit des éléments de G.

Q2. — On suppose que $G = S_3$. Quels sont les éléments de G que l'on peut écrire comme produits de tous les éléments de G dans un ordre quelconque, chaque élément apparaissant exactement une fois ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soient p un nombre premier impair, $S = \left[\!\left[1, \frac{p-1}{2} \right]\!\right]$. et $a \in \mathbf{Z}$ non divisible par p.

Q1. — Démontrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1\ [p]$.

Q2. — Démontrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$ si et seulement si la classe de a dans $\mathbb{F}_p$ est un carré.

Q3. — Justifier que, pour tout $s \in S$, il existe un unique couple $(e_s(a), s_a) \in \{\pm 1\} \times S$ tel que :

$$as \equiv e_s(a) s_a\ [p]$$

puis démontrer que l'application $s \longmapsto s_a$ est une bijection de S sur lui-même.

On introduit le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ *qui est l'élément de* $\{\pm 1\}$ *congru à* $a^{\frac{p-1}{2}}$ *modulo* p.

Q4. — Démontrer que :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{s \in S} e_s(a).$$

Q5. — Démontrer que, pour tout entier naturel impair m, pour tout réel x :

$$\sin(mx) = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sin(x) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2(x) - \sin^2\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right).$$

Q6. — Démontrer que, pour tout premiers impairs p et q distincts :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \qquad \left[\text{loi de réciprocité quadratique}\right].$$

□