ESPACES DE BANACH

TD 20

par David Blottière, le 2 avril 2024 à 21h22

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes.

(A) Toute partie de $\mathbf{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbf{R}$.

(B) Toute partie de $\mathbf{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbf{R}$.

(C) L'espace $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ est complet.

(D) Deux suites adjacentes de nombres réels sont toujours convergentes.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Q1. — On suppose qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant a^n.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Q2. — On suppose que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle nécessairement de Cauchy?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soient $(E_1, ||\cdot||_1)$, $(E_2, ||\cdot||_2)$ *des* $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels normés complets. On munit* $E_1 \times E_2$ *de la norme* $||\cdot||$ *définie par :*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad ||(x_1, x_2)|| := \max\left\{||x_1||_1, ||x_2||_2\right\}.$$

Démontrer que $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Banach.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soient $(E, ||\cdot||)$ *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel normé et* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ *deux suites de Cauchy.*

Démontrer que la suite $\left(||x_n - y_n||\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Soient (E, N_E), (F, N_F) *des* $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels normés et* $f : E \longrightarrow F$ *une application.*

Q1. — Démontrer que , si f est uniformément continue, alors pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^N$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}} \in F^N$ est de Cauchy.

Q2. — Démontrer que si, pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^N$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}} \in F^N$ est de Cauchy, alors f est continue.

Q3. — Démontrer que la réciproque de Q1 est fausse.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que :

$$\exists\, a > 0, \quad \forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \left|f(x+y) - f(x) - f(y)\right| \leqslant a.$$

Q1. — Démontrer que :

$$\forall\, y \in \mathbf{R}, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}^*, \quad \left|f\left(2^k y\right) - 2^k f(y)\right| \leqslant 2^k a.$$

Q2. — En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $\left(\dfrac{f(2^n x)}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.

Q3. — En déduire que la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle vérifie :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad g(x+y) = g(x) + g(y).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soit X un ensemble non vide et

$$\mathscr{B}(X, \mathbf{R}) := \left\{f \in \mathbf{R}^X \ : \ f \text{ est bornée}\right\}.$$

On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||$ définie par :

$$\forall\, f \in \mathscr{B}(X, \mathbf{R}), \quad ||f|| := \sup\left\{|f(x)| \ : \ x \in \mathbf{R}\right\}.$$

Démontrer que $(\mathscr{B}(X, \mathbf{R}), ||\cdot||)$ est un espace de Banach.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ de la norme N définie par :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R}), \quad N(f) := ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

Démontrer que $\left(\mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R}), N\right)$ est un espace de Banach.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Soient (E, N_E) un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, (F, N_F) un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé complet et :

$$\mathscr{L}_c(E, F) := \left\{f \in F^E \ : \ f \text{ est linéaire et continue}\right\}.$$

On munit $\mathscr{L}_c(E, F)$ de la norme N définit par :

$$\forall\, f \in \mathscr{L}_c(E, F), \quad N(f) = \sup\left\{N_F(f(x)) \ : \ x \in E \text{ et } N_E(x) = 1\right\}.$$

Démontrer que le $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $(\mathscr{L}_c(E, F), N)$ est complet.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Démontrer que le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 5x_1 & = & 2\sin(x_1) & + & \cos(x_2) \\ 5x_2 & = & \cos(x_1) & + & 3\sin(x_2) \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, possède une unique solution.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace normé complet. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de E. On souhaite démontrer que :

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Omega_n \text{ est dense dans } E \qquad [\text{théorème de Baire}].$$

Q1. — Soit V un ouvert non vide de E. Construire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, un couple $(x_n, r_n) \in E \times \left]0, \frac{1}{2^n}\right[$ de sorte que :

(a) $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega_0 \bigcap V$;

(b) pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \Omega_{n+1} \bigcap B(x_n, r_n)$.

Q2. — En déduire le théorème de Baire.

Q3. — Démontrer qu'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé possédant une base dénombrable ne peut pas être complet.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach, Ω un ouvert de E contenant 0 et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\mathrm{d}f(0_E) = \mathrm{id}_E$. Nous souhaitons démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0_E dans E tel que :

(A) *$f(V)$ est un ouvert de E ;*

(B) *l'application :*

$$\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & f(V) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est bijective.

(C) *l'application $\left(\widetilde{f}\right)^{-1} : f(V) \longrightarrow V$ est de continue.*

Q1. — Démontrer le résultat dans ce cas particulier où $n = 1$.

Considérons l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ x & \longmapsto & x - f(x) \end{array} \right.$$

et $||\cdot||$ une norme quelconque sur $\mathbf{R}^n$.

Q2. — Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(0,r)}^2, \quad \left|\left|g(x_1) - g(x_2)\right|\right| \leqslant \frac{1}{2} ||x_1 - x_2||.$$

Soit $y \in \overline{B(0, r/2)}$.

Q3. — Démontrer que l'application :

$$h_y \left| \begin{array}{ccc} \overline{B(0,r)} & \longrightarrow & \overline{B(0,r)} \\ x & \longmapsto & x - f(x) + y \end{array} \right.$$

est bien définie et $1/2$-lipschitzienne.

Q4. — En déduire que l'application :

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \overline{B(0,r)} & \longrightarrow & \overline{B(0,r/2)} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est bien définie et bijective.

Q5. — Démontrer que l'application $f_1^{-1} : \overline{B(0,r)} \longrightarrow \overline{B(0,r/2)}$ est 2-lipschitzienne.

Q6. — Donner alors un voisinage ouvert V de 0_E dans E satisfaisant les conditions (A) et (B) et (C).

Remarque : on peut déterminer un voisinage V de 0_E dans E, vérifiant les conditions (A), (B) et la condition (D) ci-dessous, plus forte que la condition de régularité (C).

(D) *l'application $\left(\widetilde{f}\right)^{-1} : f(V) \longrightarrow V$ est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Il s'agit du théorème d'inversion locale.

□