Calcul différentiel — TD 18

par David Blottière, le 29 mars 2024 à 06h01

Énoncé de l'exercice 1

On confond $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^* & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, déterminer ses dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et sa différentielle.

□

Énoncé de l'exercice 2

Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$*, notons :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q1. — Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Q2. — Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 3

Q1. — Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

admet un prolongement continu à $\mathbf{R}^2$.

Q2. — Ce prolongement est-il de classe $\mathscr{C}^1$?

□

Énoncé de l'exercice 4

La fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

On définit l'application f par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} \end{array} \right.$$

Q1. — Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Q2. — Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

On définit l'application f par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.

Q2. — La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Justifier que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{xy}(x+y) \end{array} \right.$$

est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et calculer sa différentielle.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Justifier que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xy+yz+zx \end{array} \right.$$

est différentiable sur $\mathbf{R}^3$ et calculer sa différentielle.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Justifier que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(xy, \dfrac{1}{2}x^2+y, \ln(1+x^2)\right) \end{array} \right.$$

est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et calculer sa matrice Jacobienne en tout point de $\mathbf{R}^2$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Q1. — Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| \leqslant x^2 - xy + y^2$.

Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}$$

où p et q sont des entiers naturels non nuls.

Q2. — Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est-elle continue ?

Q3. — Démontrer que si $p + q = 2$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

On suppose que $p + q = 3$ et que f est différentiable en $(0,0)$.

Q4. — Justifier qu'alors il existe deux constantes a et b telles que $f(x, y) = ax + by + \mathrm{o}\left(\left|\left|(x, y)\right|\right|\right)$.

Q5. — En étudiant les applications partielles $x \longmapsto f(x,0)$ et $y \longmapsto f(0, y)$, justifier que $a = b = 0$.

Q6. — Conclure, à l'aide de l'application $x \longmapsto f(x,x)$, que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

On munit $E = \mathbf{R}_n[X]$ de la norme :

$$||\cdot|| \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} |P(t)|. \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (P(t))^3 \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \left|\left|x - y\right|\right|^2.$$

Démontrer que f est constante.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Soit $f : U \longrightarrow V$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbf{R}^q$. On suppose que f est différentiable en a et que f admet une fonction réciproque g, différentiable au point $b = f(a)$.

Démontrer que $p = q$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ *différentiable. On suppose que :*

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Q1. — Démontrer que $f(0) = 0$.

Q2. — Démontrer que f est linéaire.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Soit $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}\right)$ *telle que :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Montrer qu'il existe une fonction $\Phi \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \Phi(x-y).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Démontrer que l'application :

$$\exp : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et que :

$$\forall (A,H) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad \mathrm{dexp}(A)\cdot H = \int_0^1 \exp(tH)\,H\,\exp((1-t)A)\,\mathrm{d}t.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Soit l'application $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *définie par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Q1. — Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.

Q2. — Démontrer que la fonction f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $h = (h_1,h_2)$ de $\mathbf{R}^2$ au point $(0,0)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

Soit $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$, *où* $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $(a_0,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$. *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy). \end{array} \right.$$

Démontrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ au point $(0,0)$ et les exprimer en fonction des coefficients de P.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$, *où* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. *Soit :*

$$S \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) := \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| < r\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

sa somme. Munissons $\mathbf{R}^2$ *de sa norme euclidienne usuelle et considérons l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} B((0,0),R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,y) & \longmapsto & S(x+iy). \end{array} \right.$$

Démontrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ au point $(0,0)$ et les exprimer en fonction des coefficients a_n ($n \in \mathbf{N}$) de la série entière. On justifiera soigneusement les échanges de symboles $\sum$ et lim, si on est amené à en considérer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Soit la fonction f *de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}$ *définie par, pour tout* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *:*

$$f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)\,.$$

Démontrer que la fonction f est différentiable en tout point $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et $a\in E$.

Démontrer que l'application :

$$f\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \langle u(x),x\rangle\end{array}\right.$$

est différentiable en a et calculer sa différentielle en a.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Soit l'application :

$$f\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z,xyz).\end{array}\right.$$

Q1. — Démontrer que la fonction f est différentiable en tout point $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y,z).

On dit que f est une submersion en un point (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$ si l'application $\mathrm{d}f(x,y,z)\in\mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2\right)$ est surjective. On note :

$$\mathscr{U}:=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ f \text{ est une submersion au point } (x,y,z)\right\}.$$

Q2. — Démontrer que $\mathbf{R}^3\setminus\mathscr{U}$ est la réunion de quatre droites que l'on explicitera.

Q3. — Démontrer que $\mathscr{U}$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^3$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Soit $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbf{R}^2$.

Q1. — Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ fixé. On définit la fonction g par :

$$g\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & f(tx,ty).\end{array}\right.$$

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

On suppose que f est homogène, i.e. que

$$\forall (x,y,t)\in\mathbf{R}^3,\quad f(tx,ty)=t\,f(x,y).$$

Q2. — Démontrer que pour tout $(x,y,t)\in\mathbf{R}^3$

$$f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\,y.$$

Q3. — En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad f(x,y)=\alpha x+\beta y.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

On munit $\mathbf{R}^2$ de sa norme eucidienne, définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad ||(x,y)|| := \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Soit la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:

$$f(x,y) = (\sin(x+2y), \cos(2x+y))$$

Q1. — Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).

Q2. — Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, l'application $\mathrm{d}f(x,y)$ est 3-lipschitzienne.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbf{R}^2$. Soient $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ fixé.

Q1. — Démontrer que l'application :

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x+t,y+t) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t).$$

($\star$) *On souhaite déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ différentiables sur $\mathbf{R}^2$ et qui vérifient :*

$$\forall (x,y,t) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x+t,y+t) = f(x,y).$$

Considérons une fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ différentiable sur $\mathbf{R}^2$ telle que :

$$\forall (x,y,t) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)\,.$$

Q2. — Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Soient a,b,c,d quatre réels fixés et soit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(au+bv, cu+dv) \end{array} \right.$$

Q3. — Démontrer que l'application g est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Q4. — En choisissant $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ de telle sorte que :

(a) pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$;

(b) la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible

démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}$, telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x-y)\,.$$

Soit une fonction $\varphi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}$. On lui associe la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x-y). \end{array} \right.$$

Q5. — Démontrer que l'application f est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et que :

$$\forall (x, y, t) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x, y)\,.$$

Q6. — Formuler une conclusion soignée pour répondre à l'objectif ($\star$).

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit l'application f par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1}\,. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que l'application f est différentiable en I_n et que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

$$\mathrm{d}f(I_n) \cdot H = -H.$$

Q2. — Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Démontrer que f est différentiable en A et que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$\mathrm{d}f(A) \cdot H = -A^{-1}\,H\,A^{-1}\,.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & \det(A). \end{array} \right.$$

Q1. — Justifier que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q2. — Démontrer :

$$f(I_n + H) \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}}{=} 1 + \mathrm{Tr}(H) + \mathrm{o}(\|H\|)\,.$$

Que peut-on déduire pour l'application f ?

Q3. — Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que :

$$f(A + H) \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}}{=} \det(A) + \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(A)^{\top} H\right) + \mathrm{o}(\|H\|)\,.$$

Que peut-on déduire pour l'application f ?

Q4. — Calculer, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{d}f(A)$.

□