# Équations différentielles linéaires

**TD 17**

*par David Blottière, le 24 mars 2024 à 15h45*

## Énoncé de l'exercice 1

Résoudre sur l'intervalle $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ :\ y' + \dfrac{x}{x^2-1}y = 2x$.

□

## Énoncé de l'exercice 2

Résoudre sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ :\ 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

□

## Énoncé de l'exercice 3

Résoudre sur l'intervalle $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ :\ t^2\,y' - y = 0$.

□

## Énoncé de l'exercice 4

Résoudre sur l'intervalle $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ :\ (1-t)\,y' - y = t$.

□

## Énoncé de l'exercice 5

Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E})\ :\ 4xy'' + 6y' + y = 0.$$

□

## Énoncé de l'exercice 6

*Soit l'équation différentielle* $(\mathscr{E})\ :\ x(x-1)\,y'' + 3xy' + y = 0$.

**Q1. —** Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.

**Q2. —** Est-ce que toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ ?

□

## Énoncé de l'exercice 7

Résoudre sur $\mathbf{R}$ le système différentiel $(\mathscr{S})$ : $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y. \end{cases}$

□

## Énoncé de l'exercice 8

Résoudre sur **R** le système différentiel $(\mathscr{S})$ : $\begin{cases} x' = -x+3y+e^t \\ y' = -2x+4y. \end{cases}$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Résoudre sur **R** le système différentiel suivant $(\mathscr{S})$ : $\begin{cases} x' = x+8y+e^t \\ y' = 2x+y+e^{-3t}. \end{cases}$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Résoudre sur **R** le système différentiel suivant $(\mathscr{S})$ : $\begin{cases} x' = y+z \\ y' = x \\ z' = x+y+z. \end{cases}$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Résoudre sur **R** le système différentiel $(\mathscr{S})$ : $\begin{cases} x' = 3x+y \\ y' = 2x-y \\ z' = -4x-8y+2z. \end{cases}$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Résoudre sur **R** le système différentiel suivant $(\mathscr{S})$ : $\begin{cases} x' = x-z \\ y' = x+y+z \\ z' = -x-y+z. \end{cases}$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Résoudre sur **R** l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $(t^2+1)x''-2x=t$. On pourra commencer par étudier les solutions polynomiales.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Considérons l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

**Q1. —** Déterminer les solutions de cette équation différentielle développables en série entière au voisinage de l'origine, ainsi que leur somme.

**Q2. —** Indiquer une méthode pour déterminer toutes les solutions de cette équation différentielle sur les intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Considérons l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $x'''-5x''+7x'+3x=0$.

**Q1. —** Démontrer qu'une fonction $x_H$ de classe $\mathscr{C}^2$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur **R** si et seulement si la fonction :

$$X_H \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est solution de l'équation différentielle $X' = AX$, où $A$ est une matrice à déterminer.

**Q2. —** Trigonaliser $A$ puis résoudre $(\mathscr{E})$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Considérons le système suivant $(\mathscr{S})$ : $\left\{\begin{array}{l} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{array}\right.$. On cherche les solutions $x, y, z$, définies sur $\mathbf{R}$, vérifiant en outre la condition $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

**Q1. —** Discuter l'existence et l'unicité de la solution.

**Q2. —** Démontrer que la trajectoire de la solution est contenue dans une sphère et dans un plan. Reconnaître l'intersection de la sphère et du plan.

**Q3. —** Résoudre $(\mathscr{S})$ et retrouver le résultat de la question précédente.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

**Q1. —** Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation $(\mathscr{E}\mathscr{H})$ : $y'' + 4y = 0$.

*Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, posons :*

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x g(t)\sin(2x - 2t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

**Q2. —** Démontrer que $h$ est solution de l'équation différentielle : $(\mathscr{E})$ : $y'' + 4y = g$, puis résoudre cette dernière.

**Q3. —** Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f'' + 4f \geq 0$. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0.$$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Résoudre sur $\mathbf{R}$ les systèmes d'équations différentielles linéaires suivants.

$$(\mathscr{S}_1) \left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & \cos(t)x & + & \sin(t)y \\ y' & = & -\sin(t)x & + & \cos(t)y \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_2) \left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & (2-t)x & + & (t-1)y \\ y' & = & 2(1-t)x & + & (2t-1)y \end{array}\right.$$

$$(\mathscr{S}_3) \left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & (t+3)x & + & 2y \\ y' & = & -4x & + & (t-3)y \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_4) \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & (1+t)x & + & ty & - & e^t \\ y' & = & -tx & + & (1-t)y & + & e^t \end{array}\right.$$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Résoudre sur $\mathbf{R}$ le système différentiel $(\mathscr{S})$ : $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x - 3y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - 3y. \end{array}\right.$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

*Considérons le système différentiel $(\mathscr{S})$ :* $\left\{\begin{array}{l} x'' = x' + y' - x \\ y'' = x' + y' - y. \end{array}\right.$

Mettre $(\mathscr{S})$ sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 et le résoudre sur $\mathbf{R}$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Soit $u \in \mathbf{R}^3$ un vecteur unitaire. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ :\ x' = u \wedge x$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

*On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(\mathscr{E}) \qquad x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x' + x = 0.$$

**Q1. —** Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telle que pour tout $x \in \mathscr{C}^4(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $x$ est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si la fonction :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^4\left(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{C})\right)$$

est solution de l'équation différentielle $X' = AX$.

**Q2. —** Démontrer que 1 est valeur propre double de $A$ et que $\dim (E)_1(A) = 1$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**Q3. —** Démontrer que $A$ est semblable à la matrice diagonale par blocs $B$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Q4. —** Calculer les puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire $B^n$ pour tout entier naturel $n$.

**Q5. —** Déterminer les solutions de l'équation $X' = AX$, puis celles de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

**Q1. —** Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $y'' + y = \dfrac{1}{t}$.

**Q2. —** En déduire une expression de l'intégrale à paramètre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Q3. —** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $x(x-1)y'' - xy' + 2y = x$ sur un intervalle à préciser.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $(1+x^2)y'' + xy' - y = x\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$. On pourra commencer par chercher une solution ne s'annulant pas de l'équation homogène associée.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $y'' - my' + 2y = 1 + x^2 + e^x$ sur $\mathbf{R}$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

*Soit l'équation différentielle* $(\mathscr{E})$ : $x^2\, y'' + 4\, x\, y' + \left(2 - x^2\right)\, y = -1$.

**Q1. —** Déterminer un réel $\alpha$ pour que la fonction :

$$y_1 \left| \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$$

soit solution de $(\mathscr{E})$ sur $]0,+\infty[$.

**Q2. —** Déterminer une solution de $(\mathscr{E})$ développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

**Q3. —** Résoudre $(\mathscr{E})$ sur $]0,+\infty[$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

*Pour* $\lambda \in ]-1/2,+\infty[$, *considérons l'équation différentielle* $(\mathscr{E}_\lambda)$ : $x(x+1)y'' + (2x+1)y' - \lambda(\lambda+1)y = 0$.

**Q1. —** Démontrer que $(\mathscr{E}_1)$ possède, sur $\mathbf{R}$, une unique solution polynomiale $P_1$ vérifiant $P_1(0) = 1$.

*Notons* $\varphi$ *et* $\psi$ *les fonctions définies sur* $\mathbf{R}^*$ *par :*

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^*,\quad \varphi(x) = \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} \quad \textit{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}.$$

**Q2. —** Décomposer $\varphi$ et $\psi$ en éléments simples et déterminer une primitive de $\varphi$ et une primitive de $\psi$.

**Q3. —** Résoudre $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0,+\infty[$.

**Q4. —** Déterminer les solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$ développables en série entière au voisinage de 0.

**Q5. —** Déterminer une condition sur $\lambda$ pour que $(\mathscr{E}_\lambda)$ possède, sur $\mathbf{R}$, une solution polynomiale non nulle.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]0,+\infty[$. On commencera par chercher des solutions de l'équation homogène associée sous forme polynomiale et sous la forme $x \mapsto x^\alpha$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = 0$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $y''' - 2y'' + y' + 2y = e^x$.

□

## Énoncé de l'exercice 32

Considérons l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (1+x^2)y' = 1+3xy$.

**Q1.** — Résoudre $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$. On pourra chercher des solutions polynomiales de $(\mathscr{E})$.

**Q2.** — Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$, bornées au voisinage de $+\infty$.

□

## Énoncé de l'exercice 33

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (1+t^2)y'' - 2y = t$. On pourra commencer par chercher une solution sous la forme d'un polynôme.

□

## Énoncé de l'exercice 34

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (1+t^2)^2y'' - 2t(1+t^2)y' + 2(t^2-1)y = (1+t^2)$. On pourra commencer par chercher une solution sous la forme d'un polynôme.

□

## Énoncé de l'exercice 35

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : t^3y'' + ty' - y = 0$.

□

## Énoncé de l'exercice 36

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : t^2y'' + ty' - y = 1$.

□

## Énoncé de l'exercice 37

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : t(1-t)y'' + (1-3t)y' - y = 0$. On commencera par rechercher une solution développable en série entière.

□

## Énoncé de l'exercice 38

Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle : $(\mathscr{E}) : 4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$. On commencera par rechercher une solution développable en série entière.

□

## Énoncé de l'exercice 39

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$.

**Q1.** — Résoudre $(\mathscr{E})$ sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

**Q2.** — Résoudre $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $y'' + \dfrac{2t}{t^2+1}y' + \dfrac{1}{(t^2+1)^2}y = \dfrac{t}{(t^2+1)^2}$. On pourra effectuer le changement de variable $x = \arctan(t)$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

*On considère l'équation différentielle* $(\mathscr{E})$ : $ty'' - y' - t^3 y = 0$.

**Q1. —** Soit $I = ]a,b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$. Notons $I' = ]-b,-a[$ son symétrique. Démontrer que si $y$ est une solution de $(\mathscr{E})$ sur $I$, alors $t \mapsto y(-t)$ est une solution de $(\mathscr{E})$ sur $I'$.

**Q2. —** Soit $y$ une solution de $(\mathscr{E})$ sur $]0,+\infty[$. Posons $z(t) = y\left(\sqrt{t}\right)$, pour tout $t > 0$. Démontrer que $z$ vérifie une équation d'ordre 2 à coefficients constants. En déduire les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0,+\infty[$.

**Q3. —** Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

*Considérons l'équation différentielle* $(\mathscr{E})$ : $ty'' + 3y' - 4t^3 y = 0$.

**Q1. —** Déterminer une solution $y_1$ de $(\mathscr{E})$ non nulle et développable en série entière au voisinage de 0.

**Q2. —** Déterminer le rayon de convergence de la série entière associée à $y_1$, puis exprimer $y_1$ à l'aide de de fonctions usuelles.

**Q3. —** Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0,+\infty[$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ : $(1+t^2)y'' + ty' - y = 0$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $ty'' + 2y' - ty = 0$. On pourra chercher une solution sous la forme $y(t) = t^\alpha z(t)$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ et $z \in \mathscr{C}^2(]0,+\infty[,\mathbf{R})$.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 46

Déterminer toutes les fonctions $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables telles que :

$$\forall\, t \in ]0,+\infty[, \quad f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right).$$

On pourra se ramener à une équation diférentielle scalaire d'ordre 2, puis la résoudre en posant $x = \ln(t)$.

□

## Énoncé de l'exercice 47

*Soient $a < b$ et $u, v \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R}^+)$. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :*

$$\forall t \in [a,b], \quad u(t) \leqslant C + \int_a^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Démontrer que :

$$\forall t \in [a,b], \qquad u(t) \leqslant C \exp\left(\int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Ce résultat porte le nom de lemme de Gronwall.

□

## Énoncé de l'exercice 48

*Munissons $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne $||\,.\,||$ définie par :*

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad ||Y||^2 = Y^\top Y.$$

*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique.*

**Q1. —** Soit $X$ une solution de l'équation différentielle $X' = AX$. Démontrer que la fonction :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & ||X(t)|| \end{array}\right.$$

est constante.

**Q2. —** En déduire que $e^A \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$.

□

## Énoncé de l'exercice 49

*Soit $J \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{R})$ telle que $J^2 = -I_{2n}$.*

**Q1. —** Démontrer :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \exp(tJ) = \cos(t)\,I_{2n} + \sin(t)\,J.$$

**Q2. —** En déduire les solutions de l'équation différentielle $X' = JX$.

□

## Énoncé de l'exercice 50

*Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C})$ une matrice telle que* $\mathrm{Sp}(A) \cap 2i\pi\mathbf{Z} = \emptyset$.

**Q1. —** Démontrer que $e^A - I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

**Q2. —** Soit $B \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}))$ une fonction 1-périodique, i.e. telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad B(t+1) = B(t).$$

Démontrer que l'équation différentielle :

$$X' = Ax + B(t)$$

admet une unique solution 1-périodique.

□

## Énoncé de l'exercice 51

*Soit $q \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$. Soit $y$ une solution de l'équation différentielle :*

$$y'' + q(t)y = 0.$$

Démontrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $y(t) = 0$. À quelle condition a-t-on de plus $y'(t) = 0$ ?

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 52

*Soient $a, b \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, soit $y \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbf{R})$ une solution non nulle de l'équation différentielle :*

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

Démontrer que l'ensemble $\{t \in [0,1] \ : \ y(t) = 0\}$ est fini.

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 53

*Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ muni d'une base $\mathscr{B}$, $a \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathscr{L}(\mathscr{E}))$ et $t_0 \in \mathbf{R}$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $x' = a(t)(x)$. Notons $W$ le Wronskien de ce système fondamental de solutions dans la base $\mathscr{B}$.*

Démontrer que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(a(s))\, \mathrm{d}s\right).$$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 54

*Soit $A \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathscr{M}_n(\mathbf{C}))$.*

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

**(a)** Il existe une application $P \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ telle que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad A(t) = P(t)\, A(0)\, P(t)^{-1}.$$

**(b)** Il existe une application continue $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \mathscr{M}_n(\mathbf{C}))$ telle que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad A'(t) = L(t)\, A(t) - A(t)\, L(t).$$

□

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 55

*Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une application continue telle que :*

$$\forall\, (t,s) \in \mathbf{R}^2, \quad f(t+s) = f(t) f(s).$$

**Q1. —** Supposons $f$ dérivable en 0. Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \qquad f'(t) = f'(0) f(t)$$

et en déduire que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = e^{t f'(0)}.$$

*On suppose désormais seulement $f$ continue.*

**Q2. —** Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(s)\ \mathrm{d}s \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

**Q3. —** Démontrer que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\quad f(t)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(s)\ \mathrm{d}s = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(s)\ \mathrm{d}s.$$

**Q4. —** Démontrer que $f$ est dérivable puis en déduire une expression de $f$.

□

## Énoncé de l'exercice 56

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.*

**Q1. —** Démontrer les implications suivantes.

**(a)** $\left(e^{tA} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right) \implies \left(\forall\,\lambda \in \mathrm{Sp}(A),\quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0\right).$

**(b)** $\left(\|e^{tA}\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty\right) \implies \left(\forall\,\lambda \in \mathrm{Sp}(A),\quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0\right).$

**Q2. —** Démontrer les implications réciproques. On utilisera la décomposition de Dunford.

□

## Énoncé de l'exercice 57

*Soit $B \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathscr{S}_n(\mathbf{R}))$ une fonction bornée. Notons $(\mathscr{E})$ le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \forall\, t \in \mathbf{R}, \quad A'(t) = B(t)A(t) \\ A(0) = I_n \end{cases}$$

**Q1. —** Étudier l'existence et l'unicité des solutions de $(\mathscr{E})$.

**Q2. —** Soit $A$ une solution. Démontrer que $A(t) - A(t)^T = \mathrm{o}\left(t^2\right)$ au voisinage de 0. La matrice $A(t)$ est-elle nécessairement symétrique ?

**Q3. —** Démontrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $A(t)$ est inversible.

□

## Énoncé de l'exercice 58

**Q1. —** Notons $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\mathscr{N}$ est un fermé.

**Q2. —** Soit $(A, B) \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})^2$. Démontrer qu'il existe $N\colon [0,1] \longrightarrow \mathscr{N}$ continue telle que la solution $M$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Y' = NY \\ Y(0) = A \end{cases}$$

vérifie $M(1) = B$.

□

## Énoncé de l'exercice 59

*Soient $(\eta, \varphi) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})^2$ des fonctions 1-périodiques. On suppose $\eta$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$. Notons $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $y'' - \eta y = \varphi$.*

**Q1. —** Démontrer que $(\mathscr{E})$ admet au plus une solution 1-périodique.

**Q2. —** On suppose $\eta$ constante. Démontrer que $(\mathscr{E})$ admet une solution 1-périodique.

**Q3. —** Établir l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $0 < |\lambda| < \alpha$, l'équation :

$$y'' - \lambda\eta y = \varphi$$

admette une unique solution 1-périodique. On pourra écrire $\varphi = \lambda\varphi_1 + \varphi_0$, avec $\varphi_1$ constante et $\int_0^1 \varphi_0 = 0$. On cherchera alors une solution sous la forme $\lambda^n(u_n + c_n)$, où $c_n$ est une fonction constante et $u_n$ une fonction 1-périodique vérifiant $u_n(0) = 0$.

□