FONCTIONS VECTORIELLES

TD 16

par David Blottière, le 21 février 2024 à 21h39

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : [0,1] \longrightarrow E$ une fonction nulle en 0 et dérivable en 0 à droite.

Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} f'_d(0).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbf{R} \longrightarrow E$ une fonction dérivable en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(2x) = 2f(x).$$

Démontrer que f est linéaire.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{O}_{2n+1}(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \,:\, A^\top A = I_{2n+1}\right\}$ et une application $M : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad M(t) \in \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbf{R})$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Pour tout $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$, on pose :

$$D_n(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{pmatrix} \qquad [\textit{déterminant d'une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})]\,.$$

Calculer $D_n(x)$, pour $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E, a, b des réels tels que $a < b$ et $f \colon [a, b] \longrightarrow E$ une fonction continue par morceaux.

Démontrer que :

$$\big(\forall\, t \in [a, b], \quad f(t) \in F\big) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \in F.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $||\cdot||$ et $f \colon [0, 1] \longrightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \big|\big|f(1)\big|\big| = 1.$$

Démontrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} \big|\big|f''(x)\big|\big| \geqslant 4.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \colon I \longrightarrow E$ une application dérivable, qui ne s'annule pas sur I.

Démontrer que l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \big|\big|f(t)\big|\big| \end{array} \right.$$

est dérivable sur I, puis exprimer, pour tout $t \in I$, $g'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^1([a, b], E)$ telle que $f(a) = 0$.

Démontrer que :

$$\left|\left|\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t\right|\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a,b]} \big|\big|f'(t)\big|\big|.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k^2}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], E)$ non identiquement nulle. On suppose que :

$$\left|\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right|\right| = \int_a^b ||f(t)||\ \mathrm{d}t$$

et on note u le vecteur normalisé de $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
Comme $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(u)^\perp$:

$$\forall\, t \in [a, b], \quad \exists!(\alpha(t), v(t)) \in \mathbf{R} \times \mathrm{Vect}(u)^\perp, \quad f(t) = \alpha(t) \cdot u + v(t).$$

Q1. — Démontrer que les fonctions α et v sont continues sur $[a, b]$.

Q2. — Démontrer que le vecteur $\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t$ est orthogonal à u.

Q3. — Démontrer que $\int_a^b \alpha(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b ||f(t)||\ \mathrm{d}t$.

Q4. — Démontrer que, pour tout $t \in [a, b]$, $\alpha(t) \leqslant ||f(t)||$.

Q5. — En déduire que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = ||f(t)|| \cdot u$.

□