PROBABILITÉS

par David Blottière, le 20 février 2024 à 15h43

TD 15

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Q1. — Soit E un ensemble fini de cardinal n. Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Q2. — Une urne contient n boules. On en tire une poignée aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on en tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soit $(p, n, m) \in]0,1[\times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes telles que* $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ *et* $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$.

Démontrer que la variable aléatoire $Z = X + Y$ suit la loi binomiale de paramètre p et de taille $n + m$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soit E *un ensemble fini de cardinal* $n \geqslant 1$. *On tire au hasard deux parties* A *et* B *de* E *et on définit les variables aléatoires* $I = \mathrm{Card}(A \cap B)$ *et* $U = \mathrm{Card}(A \cup B)$.

Q1. — Déterminer la loi de I.

Q2. — Calculer les variances de I et U.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. *Soit une urne contenant* n *boules blanches et* n *boules noires. On tire les boules* 2 *par* 2 *jusqu'à ce que l'urne soit vide.*

Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire au i-ème tirage, où $i \in [\![1, n]\!]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

INDICATIONS

Soit $(p, q) \in]0,1[\times]0,1[$. *Soient* X *une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre* p *et* Y *une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre* q. *On suppose que* X *et* Y *sont indépendantes.*

Déterminer la probabilité que la matrice :

$$\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre* λ, *où* $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$.

Q1. — Calculer $\mathbf{P}(X \in 3\mathbf{N})$.

Q2. — Étudier la limite éventuelle de $\mathbf{P}(X \in 3\mathbf{N})$ lorsque λ tend vers 0 par valeurs positives.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soit $(\lambda, p) \in]0, +\infty[\times]0, 1[$. *Considérons deux variables aléatoires* X *et* Y *à valeurs dans* $\mathbf{N}$. *telles que :*

- X *suit la loi de Poisson de paramètre* λ *;*
- *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la loi de* Y *sachant* $(X = n)$ *est la loi binomiale de paramètres* (n, p).

Déterminer la loi de Y, puis donner son espérance et sa variance.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

On note $\mathscr{P}$ *l'ensemble des nombres premiers et* ζ *la fonction définie par :*

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}. \end{array} \right.$$

Soient $s > 1$ *et* N *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{N}^*$ *telle que :*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}.$$

Pour tout nombre $p \in \mathscr{P}$, *on note* X_p *l'indicatrice de l'événement* $(p \mid N)$.

Démontrer que les variables X_p, où $p \in \mathscr{P}$, sont mutuellement indépendantes.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre* $p \in]0, 1[$. *On pose :*

$$T := \inf\{n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\} \; : \; X_n = X_{n-1} = 1\} \qquad [\textit{temps d'arrêt}].$$

Q1. — Démontrer que T est presque sûrement fini.

Q2. — Calculer $\mathbf{P}(T = 2)$ et $\mathbf{P}(T = 3)$.

Q3. — Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Exprimer $\mathbf{P}(T = n + 2)$ et fonction de $\mathbf{P}(T = n + 1)$, et $\mathbf{P}(T = n)$.

Q4. — Démontrer que T possède une espérance et la calculer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soit $p \in]0, 1[$. *On considère une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, *indépendantes, suivant toutes la loi* $\mathscr{B}(p)$. *On pose, pour tout* $r \in \mathbf{N}^*$ *:*

$$T_r := \inf\left\{n \in \mathbf{N}^* \; : \; X_1 + \ldots + X_n = r\right\} \qquad [\textit{temps d'arrêt}].$$

Q1. — Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, T_r est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

Q2. — Reconnaître la loi de T_1.

On fixe un entier $r \geqslant 2$.

Q3. — Calculer, pour tout entier $n \geqslant r$, $\mathbf{P}(T_r = n)$.

Q4. — Démontrer que la variable aléatoire T_r est presque sûrement finie.

Soient $Y_1, \ldots, Y_r$ *des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, *indépendantes, suivant toutes la loi* $\mathscr{G}(p)$.

Q5. — Déterminer la loi de $Y_1 + \ldots + Y_r$.

Q6. — Démontrer que T_r possède une espérance finie et la calculer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11 **UN CORRIGÉ**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite d'événements telle que la série* $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ *converge.*

Q1. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $B_n := \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Que dire de la suite $(\mathbf{P}(B_n))_{n\in\mathbf{N}}$?

Q2. — Démontrer que $\mathbf{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Que dire de $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$?

Nous considérons l'ensemble A *formé des éléments* $\omega \in \Omega$ *tel qu'il existe une infinité d'entiers* $n \in \mathbf{N}$ *tels que* $\omega \in A_n$, *i.e. :*

$$A := \left\{\omega \in \Omega \ : \ \textit{l'ensemble } \{n \in \mathbf{N} \ : \ \omega \in A_n\} \textit{ est infini}\right\}.$$

Q3. — Démontrer que A est un événement, puis que $\mathbf{P}(A) = 0$ (lemme de Borel-Cantelli).

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$.

Déterminer la loi de $X + Y$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$.

Reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Soient $a \in \mathbf{R}_+^*$ *et* (X, Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbf{N}^2$ *dont la loi est donnée par :*

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2, \qquad \mathbf{P}(X = j\,,\ Y = k) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\ j!\ k!}$$

Q1. — Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Q2. — Démontrer que 2^{X+Y} possède une espérance et la calculer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Soient $\lambda \in]0,1[$ *et* X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbf{N}^*$. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$ *:*

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

Q1. — Calculer λ.

Q2. — Démontrer que X possède une espérance et la calculer.

Q3. — La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit E un ensemble fini à n éléments.

Q1. — Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.

Q2. — Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

Q3. — Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B, C soient deux-à-deux disjoints et $A \cup B \cup C = E$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche, il gagne deux points, pour chaque boule noire, il perd trois points.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées, et Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du joueur.

Q1. — Déterminer la loi de la variable aléatoire X, son espérance, sa variance.

Q2. — Déterminer la loi de la variable aléatoire Y, son espérance, sa variance.

Dans la suite, on suppose que les tirages se font sans remise.

Q3. — Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Q4. — Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Une personne effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On suppose que les n appels constituent n expériences aléatoires indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité que le correspondant réponde vaut $p \in]0\,;1[$.
Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants ayant répondu.

Q1. — Donner la loi de X. Justifier.

La personne rappelle une deuxième fois les $n - X$ correspondants qui n'ont pas répondu au premier appel.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants joints au cours de la seconde série d'appels.

Q2. — Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\mathbf{P}(Y = k \mid X = i)$, pour tout $k \in [\![0, i]\!]$.

Q3. — Montrer que la loi $Z = X + Y$ suit une loi binomiale donc on déterminera les paramètres.

Q4. — Déterminer l'espérance et la variance de la variable Z.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Q1. — Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires finies, mutuellement indépendantes, de même loi, admettant un moment d'ordre 2. On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$.

Q2. — Montrer que :

$$\forall\, a > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathbf{E}(X_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_1)}{na^2}.$$

Application : on effectue n tirages successifs et mutuellement indépendants d'une boule, avec remise, dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

Q3. — Donner une valeur de n à partir de laquelle la proportion de boules rouges obtenues est comprise, avec une probabilité de 95%, entre 0.35 et 0.45 ?

□

Énoncé de l'exercice 20

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotées de 1 à 3 pouvant chacune contenir n boules. On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le nombre de compartiments restés vides.

Q1. — Préciser les valeurs prises par X.

Q2. — Déterminer $\mathbf{P}(X=2)$ puis donner la loi de X.

Q3. — Calculer $\mathbf{E}(X)$. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

□

Énoncé de l'exercice 21

Q1. — Énoncer et démontrer la formule de Bayes.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$.

Q2. — On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6.

Q3. — Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?

Q4. — Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpréter le résultat.

□

Énoncé de l'exercice 22

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon, le tirage se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche »et on note $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

Q1. — Calculer p_1.

Q2. — Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$

Q3. — En déduire la valeur de p_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

□

Énoncé de l'exercice 23

Soient X et Y deux variables aléatoires finies indépendantes.

Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles toujours indépendantes ?

□

Énoncé de l'exercice 24

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

Q1. — Exprimer $\mathbf{E}(X)$ en fonction des $\mathbf{P}(X \geqslant k)$, $k \in \mathbf{N}$.

On suppose les variables aléatoires X et Y de loi uniforme.

Q2. — Déterminer l'espérance de $\min(X,Y)$, de $\max(X,Y)$ puis de $|X-Y|$.

□

Énoncé de l'exercice 25

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

Déterminer l'espérance et la variance de X.

□

Énoncé de l'exercice 26

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.
On prélève des boules sans remise jusqu'à ce que toutes les boules rouges aient été tirées.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires au tirage de toutes les boules rouges.

Q1. — Déterminer la loi de X.

Q2. — Déterminer l'espérance et la variance de X.

□

Énoncé de l'exercice 27

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires finies, mutuellement indépendantes, de même loi. On note m leur espérance et σ^2 leur variance.

Q1. — Calculer l'espérance et la variance de $X = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$.

Q2. — Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_i - X)^2$.

□

Énoncé de l'exercice 28

Soit $p \in]0\,;1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X_n \leqslant k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

□

Énoncé de l'exercice 29

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ un espace probabilisé. À toute variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$, on associe sa fonction caractéristique qui est l'application définie par :

$$\varphi_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) \end{array} \right. .$$

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ une variable aléatoire.

Q1. — Justifier que la fonction φ_X est bien définie.

Q2. — Montrer que φ_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.

Q3. — Calculer $\varphi_X(0), \varphi'_X(0)$ et $\varphi''_X(0)$.

Q4. — Soit $p \in]0,1[$. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\mathscr{B}(p)$.

Q5. — Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\mathscr{B}(n,p)$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Q6. — Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ une variable aléatoire. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer :

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\, \mathrm{d}t.$$

Q7. — En déduire que deux variables aléatoires $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ vérifiant $\varphi_X = \varphi_Y$, ont même loi.

Q8. — Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\, \varphi_Y$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Soient $p \in]0,1[$ *et* $r \in \mathbf{N}^*$.
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée au temps $t = 0$.
On envoie un rayon laser dans cet enceinte chaque seconde.
Le premier rayon est envoyé au temps $t = 1$.
La bactérie a une probabilité p d'être touchée par le rayon. Elle meurt quand elle a été touchée r fois.
Les tirs de laser sont mutuellement indépendants.
Notons X *la durée de vie de la bactérie.*

Q1. — Déterminer la loi de X.

Q2. — Prouver que X admet une espérance et la calculer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Soient $N \in \mathbf{N}^*$ *et* $p \in]0\,;\,1[$. *Posons* $q = 1 - p$.
On considère N *variables aléatoires* $X_1, \ldots, X_N$, *mutuellement indépendantes, de même loi géométrique de paramètre* p.

Q1. — Soit $i \in [\![1, N]\!]$, soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer $\mathbf{P}(X_i \leqslant n)$ et $\mathbf{P}(X_i > n)$.

On considère la variable aléatoire $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} X_i$.

Q2. — Déterminer $\mathbf{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbf{P}(Y \leqslant n)$ puis $\mathbf{P}(Y = n)$.

Q3. — Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Soient X, Y *deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans* $\mathbf{N}$, *indépendantes et vérifiant pour tout* $k \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = p(1-p)^k$$

avec $p \in]0,1[$. *On pose* $U = \max(X, Y)$ *et* $V = \min(X, Y)$.

Q1. — Déterminer la loi du couple (U, V).

Q2. — Déterminer les lois marginales du couple (U, V).

Q3. — Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $[a\,;\,b]$, *avec* $a, b \in \mathbf{R}$ *et* $a < b$.

Q1. — Montrer que X admet une espérance m et une variance σ^2 et que $m \in [a, b]$.

Posons $Y = X - m$ *et :*

$$t = \sum_{y \geqslant 0} y\, \mathbf{P}(Y = y) \quad ; \quad s = \sum_{y \geqslant 0} y^2\, \mathbf{P}(Y = y) \quad ; \quad u = \mathbf{P}(Y \geqslant 0).$$

Q2. — Démontrer $t^2 \leqslant su$.

Q3. — Calculer l'espérance et la variance de Y. En déduire $t^2 \leqslant \left(\sigma^2 - s\right)(1-u)$.

Q4. — En déduire $t^2 \leqslant \dfrac{\sigma^2}{4}$.

Q5. — Conclure que $\sigma^2 \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

□

Énoncé de l'exercice 34

Soit $p \in]0,1[$ *et soit* $n \in \mathbf{N}^*$.
Une variable aléatoire X *à valeurs dans* $\mathbf{N}^*$ *suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si :*

$$\forall\, k \in \mathbf{N}^*, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

Q1. — Démontrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre* p.

Q2. — Démontrer que $X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

Q3. — En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p.

□

Énoncé de l'exercice 35

Soit X *une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$.

Q1. — Pour quelle valeur de n la probabilité $\mathbf{P}(X = n)$ est-elle maximale ?

Q2. — À n fixé, pour quelle valeur de λ la probabilité $\mathbf{P}(X = n)$ est-elle maximale ?

□

Énoncé de l'exercice 36

Soient X, Y *deux variables aléatoires suivant des lois géométriques de paramètres respectifs* p *et* q.

Montrer que la variable aléatoire $\max(X, Y)$ a une espérance et la calculer.

□

Énoncé de l'exercice 37

Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs réelles possédant un moment d'ordre 2, non nulle presque sûrement et telle que* $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

Démontrer que :

$$\forall\, \theta \in]0,1[, \quad \mathbf{P}(X \geqslant \theta\, \mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\theta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}\left(X^2\right)} \qquad [\text{inégalité de Paley-Zygmund}].$$

□

Énoncé de l'exercice 38

Soient $\mathfrak{S}_n$ *l'ensemble des permutations de l'ensemble* $[\![1,n]\!]$ *et* $\mathscr{P}$ *la probabilité uniforme sur l'espace probabilisable* $(\mathfrak{S}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{S}_n))$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, *soit* X_k *la variable aléatoire détectant si k est un point fixe d'une permutation de* $\mathfrak{S}_n$, *définie par :*

$$X_k \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \sigma & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

On définit également la variable aléatoire N *qui compte le nombre de points fixes d'une permutation de* $\mathfrak{S}_n$, *définie par :*

$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \sigma & \longmapsto & \mathrm{Card}\left(\{k \in [\![1,n]\!] \,:\, \sigma(k) = k\}\right). \end{array} \right.$$

Q1. — Que peut-on dire des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$?

Q2. — Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer l'espérance et la variance de X_k.

Q3. — Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Q4. — Calculer l'espérance et la variance de N.

□

INDICATIONS POUR L'EXERCICE 5 | ÉNONCÉ

On nous demande de calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \left(\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}\right) = \left\{\omega \in \Omega : \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}\right\}.$$

On commence par reformuler l'assertion :

$$\text{« } \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable »}$$

en déterminant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice (déterministe) de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbf{R}$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Ensuite, on pourra appliquer la formule des probabilités totales par rapport au système quasi-complet d'événements associé à la variable aléatoire Y pour calculer la probabilité de l'événement A, reformulé après une étude de réduction.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11 ÉNONCÉ

Q1. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) = A_n \cup B_{n+1}$$

donc $B_{n+1} \subset B_n$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc décroissante. D'après le théorème de continuité monotone pour une probabilité :

$$\mathbf{P}(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n\right).$$

Q2. — Par sous-additivité d'une probabilité :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

Comme la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$ converge :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{[reste d'une série convergente]}.$$

Par théorème d'encadrement :

$$\mathbf{P}(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la question 1 et l'unicité de la limite, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n\right) = 0$.

Q3. — Nous allons démontrer que :

$$(\star) \quad A = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

ce qui livrera que A est un événement (intersection dénombrable d'unions dénombrables d'événements) et que $\mathbf{P}(A) = 0$ (question 2). La propriété $(\star)$ est équivalente à :

$$\overline{A} := \{\omega \in \Omega \,:\, \text{ l'ensemble } \{k \in \mathbf{N} \,:\, \omega \in A_k\} \text{ est fini}\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}.$$

que nous démontrons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in \overline{A}$. Comme l'ensemble $\{k \in \mathbf{N} : \omega \in A_k\}$ est fini, il existe $n(\omega) \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\{k \in \mathbf{N} \,:\, \omega \in A_k\} \subset [\![0, n(\omega)]\!].$$

Nous en déduisons que ω n'appartient à aucun des A_k, où $k \geqslant n(\omega) + 1$. Ainsi :

$$\omega \in \bigcap_{k=n(\omega)+1}^{+\infty} \overline{A_k} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}.$$

$\boxed{\supset}$ Soit $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}$. Alors, il existe $n(\omega) \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\omega \in \bigcap_{k=n(\omega)}^{+\infty} \overline{A_k}.$$

Ainsi ω n'appartient à aucun des A_k, où $k \geqslant n(\omega)$. L'ensemble $\{k \in \mathbf{N} : \omega \in A_k\}$ est donc inclus dans $[\![0, n(\omega) - 1]\!]$ et par suite fini. Donc $\omega \in \overline{A}$.