ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

TD 14

par David Blottière, le 6 février 2024 à 21h16

SOMMAIRE

§ 1. CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soient $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, $||\,u(x)\,|| = ||\,x\,||$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle\, u(x)\,,\,u(y)\,\rangle = \langle\, x\,,\,y\,\rangle$.

Q2. — Démontrer que u est bijectif.

Q3. — Démontrer que l'ensemble des isométries vectorielles de E muni de la loi $\circ$ est un groupe.

Soient $v \in \mathscr{L}(E)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Q4. — Prouver que :

$$v \in \mathrm{O}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad (v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Q1. — Justifier que A est diagonalisable.

Q2. — Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $P^{-1} = P^T$ et $P^T AP = D$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soient A et B deux vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ linéairement indépendants. Posons $M = B^\top A + A^\top B$.

Q1. — Démontrer que M est diagonalisable.

Q2. — Déterminer le noyau de M, puis les valeurs propres de M.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geqslant 3$*. Soient* a *et* b *des vecteurs unitaires de* E*, non colinéaires. Posons :*

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle\, a + \langle b, x \rangle\, b. \end{array} \right.$$

Démontrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E et déterminer ses éléments propres.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$*, posons :*

$$\Phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

Q1. — Supposons que $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\Phi(A) \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbf{R})$.

On suppose que $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q2. — Caractériser A.

Q3. — Les matrices A et $\Phi(A)$ sont-elles diagonalisables ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soient E *un espace euclidien et* $u \in \mathrm{O}(E)$*. Posons* $v = u - I_d$.

Q1. — Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(v) = (\mathrm{Im}\,(v))^{\perp}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, posons :*

$$u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

Notons p *le projecteur orthogonal sur* $\mathrm{Ker}\,(v)$.

Q2. — Démontrer que, pour tout $x \in E$:

$$u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|} p(x).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ *un* n*-uplet de réels non tous nuls. Posons :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. — Démontrer que A est diagonalisable.

Q2. — Quel est le rang de A ? Qu'en déduit-on sur son spectre ?

Q3. — Calculer A^2, En déduire le polynôme caractéristique de A ainsi que son spectre.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. *On suppose que toutes les valeurs propres de* A, *que l'on sait être réelles, sont positives ou nulles.*

Q1. — Démontrer que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 \leqslant a_{i,i} a_{j,j}$.

Q2. — Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Que dire de A si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \geqslant p$, $a_{i,i} = 0$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Déterminer les matrices $M \in M_n(\mathbf{R})$ telles que $M M^\top M = I_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. *Supposons qu'il existe* $k \in \mathbf{N}^*$ *tel que* $A^k = I_n$.

Démontrer que $A^2 = I_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ *une matrice non nulle.*

Q1. — Montrer que $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) \neq 0$.

Q2. — Montrer que $\dfrac{(\mathrm{Tr}\,(A))^2}{\mathrm{Tr}\left(A^2\right)} \leqslant \mathrm{Rg}(A)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. *Posons* $S = \dfrac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$.

Q1. — Démontrer que S est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

Q2. — Notons $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de S. Soit μ une valeur propre réelle de A. Démontrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien,* a *un vecteur unitaire de* E *et* $k \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. *Considérons :*

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + k\,\langle x, a\rangle\, a. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que u est un endomorphisme autoadjoint.

Q2. — Démontrer que u est un automorphisme de E.

Q3. — Déterminer les éléments propres de u.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$. On pose, pour tout $x \in E$, $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

Q1. — Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

Q2. — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- **(a)** $u \circ u^* = u^* \circ u$
- **(b)** $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$.
- **(c)** $\forall x \in E, \quad ||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Q1. — Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Prouver que :

$$A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Spec}(A) \subset [0, +\infty[.$$

Q2. — Prouver que, pour tout $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Q3. — Prouver que, pour tout $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, pour tout $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad A^2B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Q4. — Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

Q1. — Déterminer $(u^*)^*$.

Q2. — Déterminer $(u \circ v)^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.

Q3. — Quelle relation lie A et B ?

Q4. — Retrouver le résultat de la question 2 à l'aide du résultat de la question 3.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Q1. — Démontrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$.

Désormais, on suppose que $u^2 = 0$.

Q2. — Démontrer que $\mathrm{Ker}(u + u^*) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^*)$.

Q3. — Démontrer que $u + u^*$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Soit $S = \left(s_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S.

Q1. — Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}SP = D$, où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Q2. — Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Exprimer le coefficient $s_{i,i}$ de S en fonction des λ_j et des coefficients $p_{k,\ell}$ de P.

Q3. — Soit $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} f(s_{i,i}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$.

Q4. — En déduire que $\det(S) \leqslant s_{1,1} \dots s_{n,n}$.

□

§ 2. MINES TÉLÉCOM

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Soient $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $U \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que $\mathrm{Tr}(AU) \leqslant \mathrm{Tr}(A)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Munissons $\mathbf{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle := \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\, \mathrm{d}x.$$

Posons

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (1-X^2)P'' - 2XP'. \end{array} \right.$$

Démontrer que u est un endomorphisme autoadjoint de $(\mathbf{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et déterminer ses valeurs propres.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Q1. — Rappeler la définition d'une matrice symétrique positive et en donner une caractérisation spectrale.

Q2. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $A^\top A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Q3. — Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice $R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $R^2 = S$.

□

§ 3. NAVALE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Notons $(X_p)_{p\in\mathbf{N}}$ la suite de matrices carrées définie par $X_0 = I_n$ et, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$X_{p+1} = \frac{1}{2}\left(X_p + A X_p^{-1}\right).$$

Démontrer que la suite $(X_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers une matrice $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $R^2 = A$.

□

§ 4. CENTRALESUPÉLEC

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\,j,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n \quad \text{et} \quad \left| \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24 UN CORRIGÉ

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on pose :

$$\Phi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AMA^\top. \end{array} \right.$$

On veut démontrer que $|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|^{n+1}$.

Q1. — Démontrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. A-t-on $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$, pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$?

Q2. — Démontrer que l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (M, N) & \longmapsto & \langle M, N \rangle := \operatorname{Tr}(MN) \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

Q3. — Déterminer l'adjoint de Φ_A pour ce produit scalaire. Conclure lorsque A est orthogonale.

Q4. — Déterminer une base de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Conclure lorsque A est diagonale, puis lorsque A est symétrique.

Q5. — Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que

$$\exists (O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n(\mathbf{R}), \quad A = OS.$$

Conclure lorsque A est inversible.

Q6. — Conclure dans le cas général.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Soit E un espace euclidien. Notons Γ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$.

Q1. — Démontrer que Γ est convexe et contient $O(E)$.

Q2. — Soit $u \in \Gamma$. Démontrer que, s'il existe deux éléments distincts f et g de Γ tels que $u = \frac{1}{2}(f+g)$, alors $u \notin \mathrm{O}(E)$.

Q3. — Soit $v \in \mathrm{GL}(E)$. Démontrer qu'il existe $p \in \mathrm{O}(E)$ et $s \in \mathscr{S}(E)$ tels que $u = p \circ s$.

Q4. — Démontrer que le résultat précédent reste vrai pour $v \in \mathscr{L}(E)$.

Q5. — Démontrer la réciproque de la question 2.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Q1. — Soient $A \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $A + S \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $S^2 - A^2 = I_n$ et que $AS = SA$.

Q2. — Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe $A \in \mathscr{A}_3(\mathbf{R})$ telle que $A + S \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

(a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ **(b)** $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Q3. — Soit $A \in \mathscr{A}_3(\mathbf{R})$. Démontrer que toute valeur propre réelle de A est nulle.

Q4. — Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Monter l'équivalence des assertions suivantes.

(a) $\exists A \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}), \quad A^2 = \lambda I_n$ **(b)** $\lambda = 0$ ou ($\lambda < 0$ et n est pair)

Q5. — Soit $S \in \mathscr{A}_3(\mathbf{R})$. À quelle condition existe-t-il $A \in \mathscr{A}_3(\mathbf{R})$ t elle que $A + S \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$?

□

Énoncé de l'exercice 27

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Pour tout couple de matrices colonnes $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2$, posons :

$$\langle X, Y \rangle = X^T A Y.$$

Q1. — Démontrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On note $|| \cdot ||$ la norme associée à $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et $S = a_{1,2} + \ldots + a_{n-1,n} + a_{n,1}$.

Q2. — Démontrer que :

$$\mathrm{Tr}(A) = S + \frac{1}{2}\left(|| e_1 - e_2 ||^2 + \ldots + || e_{n-1} - e_n ||^2 + || e_n - e_1 ||^2\right).$$

Q3. — Démontrer que $|S| \leqslant \mathrm{Tr}(A)$.

□

Énoncé de l'exercice 28

On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R}_+)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à coefficients positifs.

Q1. — Une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R}_+)$ peut-elle avoir des valeurs propres strictement négatives ? Peut-elle n'avoir que des valeurs propres strictement négatives ?

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}_+)$. Notons $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A X_i = \lambda_i X_i$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, posons :

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} A & \alpha X_n \\ \alpha X_n^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Q2. — Démontrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des valeurs propres de $B(\alpha)$.

Q3. — On note β et γ les deux autres valeurs propres de $B(\alpha)$. Exprimer $\beta + \gamma$ et $\beta\gamma$ en fonction de λ_n et α.

Q4. — Trouver $A \in \mathscr{S}_2(\mathbf{R}_+)$ de valeurs propres -1 et 2 et $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $B(\alpha)$ ait pour valeurs propres -1, -2 et 4.

□

§ 5. Mines-Ponts

Énoncé de l'exercice 29

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathrm{O}(E)$ tel que $g = f \circ u$.

□

Énoncé de l'exercice 30

Soient $(A, B) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$ et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction polynomiale bijective telle que $f(A) = f(B)$.

Démontrer que $A = B$.

□

Énoncé de l'exercice 31

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = A^\top$.

Q1. — Démontrer que $A^3 = I_n$ et que $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Q2. — Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A. Démontrer que la dimension de $\mathrm{Ker}\left(f^2 + f + id\right)$ est paire.

Q3. — Réduire A dans une base orthonormale.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Soient $(A, B) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$ *telles que* $ABA = B$ *et* $BAB = A$.

Q1. — Démontrer que $A^2 = B^2$.

Q2. — On suppose A inversible. Démontrer que A et B sont des symétries orthogonales qui commutent.

Q3. — On ne suppose plus A inversible. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. *On suppose que toutes les valeurs propres de* A*, que l'on sait être réelles, sont strictement positives.*

Q1. — Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} > 0$.

Q2. — Démontrer que $\det(A) \leqslant \left(\dfrac{\operatorname{Tr}(A)}{n}\right)^n$.

Q3. — En considérant la matrice $D = \operatorname{Diag}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ et la matrice $B = DAD$, démontrer que $\det(A) \leqslant a_{1,1} \ldots a_{n,n}$.

Q4. — Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\det(M) \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Soient $(S, T) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})^2$.

Q1. — Démontrer que $\det(S) + \det(T) \leqslant \det(S + T)$.

Q2. — $\det(S)^{1/n} + \det(T)^{1/n} \leqslant \det(S + T)^{1/n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Q1. — Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Soient $(A_1, \ldots, A_p) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})^p$ *et* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^p$. *On pose :*

$$A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n \qquad \textit{et} \qquad B = |\lambda_1|\, A_1 + \ldots + |\lambda_n|\, A_n.$$

Q2. — Démontrer que $|\det(A)| \leqslant \det(B)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ *et* $B = (b_{i,j})_{1 \le i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. *Posons* $C = (a_{i,j}\, b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Démontrer que $C \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$. Le résultat subsiste-t-il si A et B sont simplement supposées positives ?

□

§ 6. X

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^\top AP$ ait tous ses termes diagonaux égaux.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $X^\top A X \geqslant 0$, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Comparer $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}\left(A^\top\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$. Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\|^2 - \langle u(x)\,, x\rangle^2 \,. \end{array} \right.$$

Q1. — La fonction f est-elle minorée ?

Q2. — À quelle condition f est-elle majorée ? Déteminer alors sa borne supérieure.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathscr{S}(E)$. Notons $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit $r \in [\![1, n]\!]$.

Q1. — Notons $G_r = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ et $H_r = \operatorname{Vect}(e_r, \ldots, e_n)$. Notons g_r l'endomorphisme induit par f sur E_r et h_r l'endomorphisme induit par f sur F_r. Démontrer que :

$$\lambda_r = \max_{x \in G_r\,,\, \|x\|=1} \left\langle g_r(x)\,, x \right\rangle = \min_{x \in H_r\,,\, \|x\|=1} \langle h_r(x)\,, x\rangle\,.$$

Q2. — Notons $\mathscr{A}_r$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension r. Démontrer que :

$$\lambda_r = \min_{F \in \mathscr{A}_r} \left[\max_{x \in F\,,\, \|x\|=1} \left\langle f(x)\,, x \right\rangle \right] = \max_{F \in \mathscr{A}_{n-r+1}} \left[\min_{x \in F\,,\, \|x\|=1} \left\langle f(x)\,, x \right\rangle \right] \qquad \text{[théorème du minimax]}\,.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $(f, g, h) \in \mathscr{L}(E)^3$ tel que : $f \circ g = h$, $g \circ h = f$, $f = f^*$ et $\det(f) \neq 0$.

Démontrer que f , h et h sont diagonalisables dans une même base.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que A est positive si et seulement si, pour toute matrice $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$, $\operatorname{Tr}(AB) \geqslant 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Soit $(A, B) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})^2$.

Q1. — Supposons A définie positive. Démontrer que AB est diagonalisable et que son spectre est contenu dans $\mathbf{R}^+$.

Q2. — On ne suppose plus A définie positive, mais seulement positive. Démontrer que le résultat de la première question subsiste.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Q1. — Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $P^\top P$ est symétrique définie positive.

Q2. — Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P^\top P$.

Q3. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive S telle que $A^\top = S^{-1} A S$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que les propositions (i) et (ii) sont équivalentes.

(i) A possède m vecteurs propres linéairement indépendants.

(ii) Il existe une matrice symétrique positive S, de rang m, telle que $S A^\top = A S$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 46

Soient $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *une matrice dont toutes les valeurs propres complexes sont de module strictement inférieur à* 1.

Montrer qu'il existe une unique matrice $K \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $K - A H A^\top = B$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 47

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q1. — Démontrer que $A^\top A$ est symétrique positive.

Q2. — Démontrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} V.$$

Q3. — En déduire que A est la somme d'au plus n matrices de rang 1.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 48

Q1. — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique positive. Démontrer que :

$$\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \qquad \left[\text{inégalité d'Hadamard}\right].$$

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* n *et* $f \in \mathscr{S}(E)$ *défini positif. Notons* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres de* f *et* $\mathscr{A}$ *l'ensemble des bases orthonormées de* E.

Q2. — Démontrer que :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \inf_{(e_1,\ldots,e_n) \in \mathscr{A}} \prod_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle.$$

□

§ 7. ENS

Énoncé de l'exercice 49

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Notons $\rho := \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda|$.

Montrer que ρ est une valeur propre de A de multiplicité 1 et que le sous-espace propre associé à ρ est engendré par un vecteur dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Il s'agit du théorème de Perron-Frobenius.

□

Énoncé de l'exercice 50

Soient E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme autoadjoint de E et G un hyperplan de E. Notons p la projection orthogonale de E sur G et g l'endomorphisme induit sur G par $p \circ f$.

Q1. — Démontrer que g est symétrique.

Notons $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f et $\lambda'_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_{n-1}$ les valeurs propres de g.

Q2. — Démontrer que :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n \qquad [\text{théorème d'entrelacement de Cauchy}].$$

□

Énoncé de l'exercice 51

On note $\mathscr{T}_n(\mathbf{R})^{++}$ l'ensemble des matrices à coefficients réels, de format (n,n), triangulaires supérieures, avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

Q1. — Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Démontrer que :

$$\exists!\, P \in \mathscr{T}_n(\mathbf{R})^{++}, \quad A = P^\top P \qquad [\text{décomposition de Cholesky}].$$

Q2. — Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que :

$$\exists!\, (Q,R) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{T}_n(\mathbf{R})^{++}, \quad A = QR \qquad [\text{décomposition } QR].$$

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 24 ÉNONCÉ

Q1. — (a) Soient $(M_1, M_2) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$. Par propriétés du produit matriciel :

$$\Phi_A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)A^\top = \lambda_1 AM_1A^\top + \lambda_2 AM_2A^\top = \lambda_1\Phi_A(M_1) + \lambda_2\Phi_A(M_2).$$

L'application Φ_A est donc linéaire.
(b) Soit $(A, B, M) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^3$. Par propriété de la transposée d'un produit :

$$\Phi_{AB}(M) = ABM(AB)^\top = ABMB^\top A^\top = \Phi_A(BMB^\top) = \Phi_A(\Phi_B(M)).$$

Nous en déduisons que $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$.

Q2. — (a) Par propriété de la multiplication matricielle et linéarité de la trace, pour tout $(M_1, M_2, N) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^3$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$:

$$\langle \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2\,, N\rangle = \mathrm{Tr}\,((\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)N) = \lambda_1 \mathrm{Tr}\,(M_1 N) + \lambda_2 \mathrm{Tr}\,(M_2 N) = \lambda_1 \langle M_1\,, N\rangle + \lambda_2 \langle M_2\,, N\rangle.$$

L'application $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est donc linéaire à droite.
(b) Par propriété de la transposée d'un produit, pour tout $(M, N) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$:

$$\langle M\,, N\rangle = \mathrm{Tr}\,(MN) = \mathrm{Tr}\left((MN)^\top\right) = \mathrm{Tr}\left(N^\top M^\top\right) = \mathrm{Tr}\,(NM) = \langle N\,, M\rangle.$$

L'application $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est donc symétrique.
(c) Pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, on calcule :

$$(\star) \qquad \langle M\,, M\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} [M]_{i,j}^2 \geqslant 0.$$

L'application $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est donc positive.
(d) Une somme de réels positifs qui est nulle a tous ses termes nuls. Nous déduisons alors de $(\star)$ que si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ vérifie $\langle M\,, M\rangle$ alors tous les coefficients de M sont nuls. L'application $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est donc définie.

Q3. — (a) Soit $(M, N) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$. Par propriété de la trace d'un produit :

$$\langle \Phi_A(M)\,, N\rangle = \mathrm{Tr}\left(AMA^\top N\right) = \mathrm{Tr}\left(MA^\top NA\right) = \mathrm{Tr}\left(M\Phi_{A^\top}(N)\right) = \left\langle M\,, \Phi_{A^\top}(N)\right\rangle.$$

Par caractérisation de l'adjoint $\Phi_A^* = \Phi_{A^\top}$.
(b) Supposons que $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. D'après (a) :

$$\Phi_A^* = \Phi_{A^\top} = \Phi_{A^{-1}}.$$

D'après la question 1 :

$$\Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}} = \Phi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathscr{S}_n(\mathbf{R})} = \Phi_{A^{-1}} \circ \Phi_A$$

donc Φ_A est un automorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ d'inverse $\Phi_{A^{-1}}$. Nous en déduisons :

$$\Phi_A^* = (\Phi_A)^{-1}$$

i.e. Φ_A est une isométrie vectorielle de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Puisque :

$$\det(A) = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \det(\Phi_A) = \pm 1$$

nous savons $|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|^{n+1}$.

Q4. — (a) La famille :

$$\mathscr{B} := \left(E_{i,i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \# \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$$

est une base orthonormée de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
(b) Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}.$$

Nous calculons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\Phi_A(E_{i,i}) = \lambda_i^2 E_{i,i}$$

et, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < n$:

$$\Phi_A(E_{i,j} + E_{j,i}) = \lambda_i \lambda_j (E_{i,j} + E_{j,i}).$$

Donc la base $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres pour Φ_A et, des calculs précédents, nous déduisons que :

$$|\det(\Phi_A)| = \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |\lambda_i|\,|\lambda_j|\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)\sqrt{\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} |\lambda_i|\,|\lambda_j|} = \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)\sqrt{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda_i|\,|\lambda_j|}.$$

Comme :

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \qquad \text{et} \qquad \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda_i|\,|\lambda_j| = \prod_{i=1}^{n}\left(|\lambda_i|^n \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j|\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(|\lambda_i|^n |\det(A)|\right) = |\det(A)|^{2n}$$

il vient :

$$|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|\sqrt{|\det(A)|^{2n}} = |\det(A)|^{n+1}.$$

(c) Supposons que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Par théorème spectral, il existe $(P, D) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{D}_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$A = PDP^\top = PDP^{-1}.$$

Alors $\det(A) = \det(D)$ et d'après la question 1 :

$$\Phi_A = \Phi_P \circ \Phi_D \circ \Phi_{P^{-1}}.$$

Toujours à l'aide de la question 1 :

$$\Phi_P \circ \Phi_{P^{-1}} = \Phi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathscr{S}_n(\mathbf{R})} = \Phi_{P^{-1}} \circ \Phi_P$$

donc Φ_P est un automorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ d'inverse $\Phi_{P^{-1}}$. Nous en déduisons que :

$$\Phi_A = \Phi_P \circ \Phi_D \circ (\Phi_P)^{-1}$$

puis $\det(\Phi_A) = \det(\Phi_D)$. Grâce au résultat établi en (b) pour les matrices diagonales :

$$|\det(\Phi_A)| = |\det(\Phi_D)| = |\det(D)|^{n+1} = |\det(A)|^{n+1}.$$

Q5. — (a) La matrice $A^\top A$ est symétrique réelle. Pour tout vecteur X non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, le vecteur AX est non nul (A est inversible) et :

$$X^\top A^\top AX = \|AX\|^2 > 0 \qquad \left[\|\cdot\| \text{ est la norme euclidienne usuelle sur } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right].$$

La matrice $A^\top A$ est donc symétrique définie positive. Il existe donc des réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ tels que :

$$A^\top A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^\top.$$

Posons :

$$S := P\,\mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)P^\top.$$

La matrice S est symétrique et vérifie $S^2 = A^\top A$. La matrice $Q := AS^{-1}$ est orthogonale :

$$Q^\top Q = \left(S^{-1}\right)^\top A^\top AS = \left(S^\top\right)^{-1} A^\top AS = S^{-1}A^\top AS = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

Nous en déduisons que :

$$A = QS$$

où $(Q, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

(b) D'après la question 1 :

$$|\det(\Phi_A)| = \left|\det\left(\Phi_Q \circ \Phi_S\right)\right| = \left|\det\left(\Phi_Q\right)\right|\,|\det(\Phi_S)|.$$

D'après les questions 3 et 4 :

$$\left|\det\left(\Phi_Q\right)\right| = |\det(Q)|^{n+1} \qquad \text{et} \qquad |\det(\Phi_S)| = |\det(S)|^{n+1}.$$

Nous en déduisons que :

$$|\det(\Phi_A)| = |\det(Q)|^{n+1}\,|\det(S)|^{n+1} = |\det(A)|^{n+1}.$$

Q6. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après la question 5, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A)$ (complémentaire d'un ensemble fini) :

$$\left|\det\left(\Phi_{A-xI_n}\right)\right| = |\det(A-xI_n)|^{n+1}.$$

Les applications :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \det\left(\Phi_{A-xI_n}\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \det(A-xI_n) \end{array}\right.$$

sont continues puisque polynomiales en x. Nous en déduisons que les applications :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left|\det\left(\Phi_{A-xI_n}\right)\right| \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |\det(A-xI_n)|^{n+1} \end{array}\right.$$

sont continues. Comme ces dernières coïncident sur $\mathbf{R} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A)$, qui est dense dans $\mathbf{R}$, elles coïncident sur $\mathbf{R}$ et en particulier en 0. Ainsi :

$$|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|^{n+1}.$$