Espaces préhilbertiens

TD 13

par David Blottière, le 26 janvier 2024 à 20h12

Sommaire

§ 1. Matrices de Gram ... 1
§ 2. Orthonormalisation de Schmidt ... 1
§ 3. Projeté orthogonal dans un espace de matrices (CCINP) ... 2
§ 4. Polynômes de Lagrange et orthogonalité ... 2
§ 5. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité ... 2
§ 6. Polynômes de Legendre et orthogonalité ... 3
§ 7. Polynômes de Laguerre et orthogonalité (Mines-2-PC-2020) ... 3
§ 8. Projecteurs orthogonaux ... 4
§ 9. Projections orthogonales (Mines-2-PC-2020) ... 4
§ 10. Inégalité de Bessel et familles totales ... 4

§ 1. Matrices de Gram

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien. Étant donnés un entier* $n \in \mathbf{N}^*$ *et* n *vecteurs* $x_1, \ldots, x_n$*, notons*

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \left(\langle x_i , x_j \rangle \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$$

Q1. — Démontrer que $\det G(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Q2. — Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. Démontrer que pour tout $x \in E$

$$\mathrm{d}(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \ldots, e_n, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_n)}}$$

§ 2. Orthonormalisation de Schmidt

On note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de l'espace* $\mathbf{R}^3$*, que l'on munit* $\mathbf{R}^3$ *de son produit scalaire usuel.*

Q1. — Appliquer l'algorithme de Schmidt à la base :

$$\underline{u} := (u_1 := (1, 0, 1), u_2 := (1, 1, 1), u_3 := (-1, -1, 0))$$

de $\mathbf{R}^3$. On notera $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ ainsi obtenue.

Q2. — D'après le cours, quelles propriétés remarquables possède la matrice de passage $P_{\underline{u} \to \underline{\varepsilon}}$?

Q3. — Expliciter la matrice $P_{\underline{u} \to \underline{\varepsilon}}$.

Q4. — Que vaut le produit $P^\top P$, où $P := P_{\underline{e} \to \underline{\varepsilon}}$?

Q5. — Comment retrouver le résultat de la question précédente sans aucun calcul ?

§ 3. PROJETÉ ORTHOGONAL DANS UN ESPACE DE MATRICES (CCINP)

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *l'application* φ *par :*

$$\varphi\left(A, A'\right) = tr\left(A^T A'\right)$$

où $tr\left(A^T A'\right)$ *désigne la trace du produit de la matrice* A^T *par la matrice* A'.
On admet que φ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Q1. — Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. — Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.

Q3. — Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.

Q4. — Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

§ 4. POLYNÔMES DE LAGRANGE ET ORTHOGONALITÉ

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q1. — Démontrer que :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(i)\,Q(i) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Q2. — Donner une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbf{R}_n[X], \langle \cdot , \cdot \rangle)$.

Q3. — Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$. Calculer les coefficients de $\pi(P)$, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$.

§ 5. POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV ET ORTHOGONALITÉ

Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbf{R})$. *On définit l'application* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *par :*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle \langle f , g \rangle := \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bien définie.

Q2. — Démontrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ défini un produit scalaire sur E.

Q3. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Le polynôme T_n *est appelé* n*-ième polynôme de Tchebychev.*

Q4. — Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale.

Q5. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $F_n := \mathrm{Vect}(T_0, \ldots, T_n)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction $f \in E$ sur F_n.

§ 6. POLYNÔMES DE LEGENDRE ET ORTHOGONALITÉ

On considère le produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ *défini par :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)\,Q(x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$*, posons* $L_n = (X^n(1-X)^n)^{(n)}$.

Q1. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que L_n est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n(2n)!}{n!}$.

Q2. — Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(1) = P(0) = 0$ et $Q \in \mathbf{R}[X]$. Démontrer que :

$$\langle P', Q \rangle = -\langle P, Q' \rangle\,.$$

Q3. — Démontrer que L_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Q4. — En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.

§ 7. POLYNÔMES DE LAGUERRE ET ORTHOGONALITÉ (MINES-2-PC-2020)

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$*, et on note* E_α *l'ensemble des fonctions continues* $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2\ \mathrm{d}x$ *est convergente.*

Q1. — Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Q2. — En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente.

Q3. — En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0,+\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

Q4. — Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n*, on définit les fonctions :*

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{n+\alpha}e^{-x} \end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad \psi_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{-\alpha}e^{x}\varphi_n^{(n)}(x) \end{array} \right.$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ *désigne la dérivée d'ordre* n *de* φ_n *(avec la convention* $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$*).*

Q5. — Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

Q6. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n *à son nuique prolongement continu à* $[0,+\infty[$*, qui est une fonction polynomiale sur* $[0,+\infty[$*. Cela permet de considérer* ψ_n *comme un élement de* E_α*, ce qu'on fera désormais.*

Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$*, on pose :*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Q7. — Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $||\cdot||_\alpha$ *la norme associée à ce produit scalaire, définie par*

$$||f||_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad \textit{pour tout } f \in E_\alpha.$$

Q8. — Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers 0 par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \mathrm{o}\left(e^{-x/2}\right) \text{ quand } x \longrightarrow +\infty.$$

Q9. — Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

Q10. — Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $||\psi_n||_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1)$.

§ 8. PROJECTEURS ORTHOGONAUX

Soient $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

Q1. — Quelle est la définition de l'assertion : « p est un projecteur orthogonal » ?

Q2. — Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \big|\big| p(x) \big|\big| \leqslant ||x||.$$

§ 9. PROJECTIONS ORTHOGONALES (MINES-2-PC-2020)

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. On note $||:\cdot||$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

Q1. — Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

Q2. — Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Q3. — Montrer enfin que $\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$.

§ 10. INÉGALITÉ DE BESSEL ET FAMILLES TOTALES

Soient $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $||\cdot||$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E et $x \in E$.

Q1. — Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2 \leqslant ||x||^2 \qquad \big[\text{inégalité de Bessel}\big].$$

Q2. — Justifier que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n \rangle^2$ est convergente.

On suppose de plus que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, i.e. que $\operatorname{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ *est une partie dense de E.*

Q3. — Démontrer que la série vectorielle $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$ converge dans E et que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n.$$