Séries entières

TD 12

par David Blottière, le 21 janvier 2024 à 17h26

Sommaire

§ 1. Miscellanées 1
§ 2. CCINP 2
§ 3. ENSAM 7
§ 4. TPE 7
§ 5. CentraleSupélec 7
§ 6. Mines-Ponts 9
§ 7. X-ÉNS 10

§ 1. Miscellanées

Énoncé de l'exercice 1

Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Supposons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ soit strictement positif. Notons :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q1. — Montrer que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad (x^2 + x - 1) f(x) = (a_0 - a_1)x - a_0.$$

Q2. — Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ ainsi qu'une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

□

Énoncé de l'exercice 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, de somme f, telle que, pour pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{R}_+$.

Q1. — Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que f est définie et continue sur $\overline{D(0,1)}$.

Q2. — Supposons que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$.

□

Énoncé de l'exercice 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On note f sa somme.

Q1. — Montrer que pour tout $r > 0$:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ni\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

Cette égalité est connue sous le nom de formule de Cauchy.

Q2. — Supposons f bornée. Montrer que f est constante.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Liouville.

Q3. — Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $d \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\left|f(z)\right| \leqslant |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à d.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Joseph Liouville (1809-1882)

□

Énoncé de l'exercice 4

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauß. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à $d \in \mathbf{N}^*$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne possède aucune racine dans $\mathbf{C}$.

Q1. — Montrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{P(z)} \end{array} \right.$$

est bornée.

Q2. — Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Q3. — Montrer que le rayon de convergence de f est infini. On pourra utiliser la formule de Cauchy (exercice 3).

Q4. — Conclure à l'aide du théorème de Liouville. (exercice 3).

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

□

§ 2. CCINP

Énoncé de l'exercice 5

Q1. — Démontrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument, pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Q2. — Pour tout $z \in \mathbf{C}$, posons :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$, sans utiliser la fonction exponentielle.

Q3. — En déduire que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) \neq 0$ et $f(-z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

□

Énoncé de l'exercice 6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Q1. — Démontrer que cette série converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.

Q2. — Démontrer que la fonction :

$$S : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur $D(0, R)$.

□

Énoncé de l'exercice 7

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes.

(a) $\sum \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) z^n$ **(b)** $\sum n^\alpha z^n \quad (\alpha \in \mathbf{R})$

□

Énoncé de l'exercice 8

Q1. — Démontrer que si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Q2. — Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$.

□

Énoncé de l'exercice 9

Q1. — Soit (a_n) une suite de nombres complexes bornée, telle que la série $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Q2. — Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$?

□

Énoncé de l'exercice 10

Q1. — Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?

Q2. — Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction :

$$f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$

La série converge-t-elle pour $x = \frac{1}{2}$? Pour $x = \frac{1}{4}$? Si oui, quelle est sa somme ?

□

Énoncé de l'exercice 11

Q1. — Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, telle que les termes de la suite (a_n) sont touts non nuls et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

où $\lambda \in \mathbf{R}$. Que dire du rayon de convergence de la série entière ?

Q2. — Démontrer que les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n x^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence R que la série entière $\sum a_n x^n$.

Q3. — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R;R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

est dérivable sur $]-R,R[$.

□

Énoncé de l'exercice 12

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et préciser le rayon de convergence.

□

Énoncé de l'exercice 13

Q1. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. Notons :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

pour tout réel x tel que la série converge.

Q2. — Déterminer le développement en série entière de la fonction ch et préciser le rayon de convergence.

Q3. — Déterminer $S(x)$, pour tout réel x tel que la série converge.

On considère la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 1 & si\ x=0 \\ \mathrm{ch}(\sqrt{x}) & si\ x>0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & si\ x<0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Q4. — Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. Considérons la série entière $\sum P(X=n)\, t^n$. Notons R_X son rayon de convergence.

Q1. — Montrer que $R_X \geq 1$.

Notons :

$$G_X(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$$

et $\mathscr{D}_{G_X}$ l'ensemble de définition de G_X.

Q2. — Montrer que $[-1,1] \subset \mathscr{D}_{G_X}$.

Q3. — Pour tout $t \in \mathscr{D}_{G_X}$, exprimer $G_X(t)$ comme une espérance.

Q4. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer $P(X=n)$ en fonction de $G_X^{(n)}(0)$.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Q5. — Déterminer $\mathscr{D}_{G_X}$ et calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in \mathscr{D}_{G_X}$.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes, suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

Q6. — Déterminer à l'aide des questions précédentes la loi de $X+Y$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Soit $a \in \mathbf{R}$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n^a)\, x^n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Soit $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$d_{n+2} = (n+1)\,(d_n + d_{n+1})\,.$$

Q1. — Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$$

En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$.

On pose :

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R;R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n. \end{array} \right.$$

Q2. — Montrer que S est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x)\,y' - x\,y = 1$$

puis exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

□

Énoncé de l'exercice 17

Soit (b_n) la suite réelle définie par $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}.$$

Q1. — Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \leqslant e^n$. En déduire que la série entière $\sum b_n\,x^n$ a un rayon de convergence R non nul.

Q2. — Calculer $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,x^n$, pour tout $x \in]-R, R[$.

□

Énoncé de l'exercice 18

Déterminer les rayons de convergence et calculer les sommes de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{4n}{(2n-1)(n+1)}\,x^n.$

□

Énoncé de l'exercice 19

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum \frac{n^2-5n+1}{n!}\,x^n.$

□

Énoncé de l'exercice 20

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum \frac{x^{4n+1}}{4n^2-1}.$

□

Énoncé de l'exercice 21

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) x^n.$

□

Énoncé de l'exercice 22

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$u_n := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Q1. — Justifier l'existence de u_n.

Q2. — Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Q3. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n\,x^n$.

□

Énoncé de l'exercice 23

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Démontrer que le rayon de convergence $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell}$.

Il s'agit de la règle de Cauchy.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n := \sum_{d\mid n} d^2$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Soit (a_n) une suite de nombres complexes p-périodique de période p, i.e. telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+p} = a_n.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et montrer que sa somme est une fraction rationnelle.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Q1. — Étudier la limite éventuelle de la suite (a_n).

Q2. — Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge et déterminer sa somme.

Q3. — Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \geqslant \frac{1}{2n+1}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Q4. — Montrer que la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

□

§ 3. ENSAM

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n} x^n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = 4u_n + v_n \qquad \textit{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

valables pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{v_n}{n!} x^n$, puis une expression à l'aide des fonctions usuelles des fonctions f et g définies par :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n.$$

□

§ 4. TPE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x \cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et déterminer les coefficients de son développement en série entière.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons d_n le nombre de permutations sans points fixe de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On pose $d_0 = 1$.

Q1. — Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Q2. — Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.

Q3. — Si $x \in]-1, 1[$, calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

Q4. — En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

§ 5. CENTRALESUPÉLEC

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Développer la fonction suivante en série entière, en précisant le rayon de convergence.

$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + t + t^2} \, \mathrm{d}t.$$

□

Énoncé de l'exercice 33

Soit $a \in \mathbf{R}$.

Développer la fonction suivante en série entière et préciser le rayon de convergence.

$$f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{1 - 2x\,\mathrm{ch}(a) + x^2}\right)$$

□

Énoncé de l'exercice 34

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

Soit (b_n) une suite de réels telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$b_n = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

Notons R_a (respectivement R_b) le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ (respectivement $\sum b_n x^n$) et notons :

$$A \left| \begin{array}{ccc}]-R_a, R_a[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad B \left| \begin{array}{ccc}]-R_b, R_b[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{array} \right. .$$

Q1. — On suppose, dans cette question uniquement, que $a_1 = 1$. Déterminer R_a, R_b, A et B.

Q2. — Montrer que R_a et R_b sont strictement positifs.

Q3. — Montrer que, sur un voisinage de 0 que l'on précisera, $B(x) = A(x) + A(x)B(x)$. Que vaut R_b ?

On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $a_p \neq 0$ et, pour tout $q \geqslant p+1$, $a_q = 0$, et que les racines du polynôme $A(X) - 1$ sont simples.

Q4. — Que dire du module des racines de $A(X) - 1$? Montrer que 1 est la seule racine de module 1 de $A(X) - 1$.

Q5. — Montrer que B est une fraction rationnelle.

Q6. — Trouver la limite de la suite (b_n).

□

Énoncé de l'exercice 35

Développer la fonction suivante en série entière, en précisant le rayon de convergence.

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

□

Énoncé de l'exercice 36

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \geqslant 1$, de somme notée f.

Q1. — Calculer pour tout $r \in [0, 1[$:

$$m_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Q2. — On suppose que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que la fonction $r \longmapsto m_f(r)$ est bornée sur $[0, 1[$.

Q3. — Exhiber un exemple pour lequel m_f est bornée et f est non bornée sur $D(0, 1)$.

Q4. — On suppose à nouveau que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que, pour tout $r \in [0,1[$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$:

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \leqslant \frac{1}{1-r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 .$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence 1, de sommes respectives f et g. Supposons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$ et que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Montrer que :

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} g(x) .$$

□

§ 6. MINES-PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Q1. — Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} .$$

Q2. — Déterminer la limite de f en 1^-.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière convergeant normalement sur le disque ouvert $D(0,R)$.

Montrer que la série $\sum a_n R^n$ converge.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et la fonction f définie par :

$$f : z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n .$$

Q1. — Déterminer le rayon de convergence de f.

Q2. — Déterminer une expression de $f(z)$, pour tout $z \in [0,1[$.

Q3. — Y a-t-il convergence sur le cercle unité ?

Q4. — Peut-on déduire l'expression sur le cercle unité de l'expression sur le disque ouvert ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante.

Montrer que la fonction f définie par :

$$f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ et ne s'y annule pas.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Soit (a_n) une suite de réels telle que la série $\sum a_n$ converge.

Q1. — Justifier l'existence de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n. \end{array} \right.$$

Q2. — Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

□

§ 7. X-ÉNS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons, pour tout $z \in D(0,1)$:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on note ℓ sa somme. Fixons $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et notons :

$$\Delta(\theta_0) := \left\{ z \in D(0,1) \ : \ \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta(\theta_0)}} f(z) = \ell\,.$$

Il s'agit du théorème d'Abel angulaire.

Niels Henrick Abel (1802-1829)

Q1. — Notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que :

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) - \ell = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

On pourra remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$ et effectuer une transformation d'Abel.

Q2. — Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $z \in \Delta(\theta_0)$:

$$\left| f(z) - \ell \right| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \frac{\cos(\theta_0)\,\varepsilon}{2} \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Q3. — Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $z \in D(1,\alpha) \cap \Delta(\theta_0)$, $\left| f(z) - \ell \right| \leqslant \varepsilon$. Conclure.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $]-a, a[$.

Q1. — Donner des exemples de telles fonctions.

Q2. — Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Il s'agit d'un théorème dû à Bernstein.

Sergueï Natanovitch Bernstein (1880-1968)

□

Énoncé de l'exercice 45

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout $z \in D(0,1)$. On fait les hypothèses suivantes :

(H1) $\exists \ell \in \mathbf{C}, \quad f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 1^-]{} \ell$;

(H2) $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le but de cet exercice est de montrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Alfred Tauber (1866-1942)

Il s'agit d'un théorème dû à Tauber.

Q1. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\forall x \in [0,1[$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k\,|a_k|}{n} x^k.$$

Q2. — Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geq N$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant (M+1)\,\varepsilon.$$

Q3. — Conclure.

□