Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre

TD 11

par David Blottière, le 12 janvier 2024 à 19h57

Sommaire

§ 1. Miscellanées

Énoncé de l'exercice 1

Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

□

Énoncé de l'exercice 2

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $u_n := n \displaystyle\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

□

Énoncé de l'exercice 3

Q1. — Démontrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q2. — Démontrer, que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $W_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. — Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante, puis que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$ et en déduire un équivalent de W_n.

Q4. — Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

□

§ 2. CCINP

Énoncé de l'exercice 4

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction : $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Q2. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$. Étudier la limite éventuelle de la suite de terme général u_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

et $u_n := \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Q1. — Étudier la convergence simple, puis uniforme, de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$.

Q2. — Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Q1. — Énoncer le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre.

Q2. — Démontrer que la fonction $f\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Q3. — Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soit $f\colon \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons f et f' intégrables sur $[0\,;+\infty[$.

Q1. — Soit $x>0$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} n\cos(t)\sin^n(t)\,f(xt)\,\mathrm{d}t$.

Q2. — Préciser le mode de convergence de la suite de fonctions de terme général u_n sur $]0,+\infty[$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1} \end{array} \right. .$$

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n := \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Q2. — Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Q3. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

□

Énoncé de l'exercice 10

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x\,(1+x^2)}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q2. — Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

□

Énoncé de l'exercice 11

Soient a, b deux réels tels que $0 < a < 1 < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$ telle que $f(1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{1+x^n}. \end{array} \right.$$

Q1. — Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q2. — Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q3. — Démontrer que $\displaystyle\int_a^1 x^{n-1} f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n} f(1)$.

□

Énoncé de l'exercice 12

Vérifier que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$ est bien définie, qu'elle converge et déterminer sa limite.

□

Énoncé de l'exercice 13

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}. \end{array} \right.$$

Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a,b]$.

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0)$.

□

Énoncé de l'exercice 14

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 15

Démontrer l'existence et étudier la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $a_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Q1. — Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q2. — Déterminer un développement asymptotique de a_n, avec une précision de l'ordre de $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{H_{n+1}}{n+1}.$$

Q2. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - H_{n+1}\right).$$

On rappelle que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$, *où γ désigne la constante d'Euler.*

Q3. — Démontrer que :

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x}_{\Gamma'(1)} = -\gamma.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Q1. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-nx}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Q2. — Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ après avoir justifié l'existence de cette intégrale.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

Soient $p, k \in \mathbf{N}^*$. Posons :

$$f_{p,k} \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^p\,(\ln(x))^k. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$. On pose : $M_{p,k} := \displaystyle\int_0^1 f_{p,k}(x)\,\mathrm{d}x$.

Q2. — Exprimer $M_{p,k}$ en fonction de $M_{p,k-1}$.

Q3. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 (x\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

Q4. — Démontrer que :

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

□

Énoncé de l'exercice 21

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$U_n := \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n} \, \mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad V_n := \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n} \, \mathrm{d}x.$$

Déterminer la nature des séries numériques $\sum_{n\geqslant 1} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} V_n$.

□

Énoncé de l'exercice 22

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1} & \textit{si } x > 0 \\ \alpha & \textit{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Q1. — Pour quelle valeur de α la fonction f_n est-elle continue?

Dans la suite de l'exercice, α désignera le réel pour lequel f_n est continue.

Q2. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n est bornée.

Q3. — Démontrer que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$, pour tout $n \geqslant 2$.

Q4. — Pour tout $n \geqslant 2$, exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$ comme la somme d'une série.

□

Énoncé de l'exercice 23

Q1. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Posons $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+\frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x$. Calculer I_n et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Supposons que la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x^2} \end{array} \right.$$

est intégrale sur $]0,1]$.

Q2. — Démontrer que la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

est intégrable sur $]0,1]$.

Q3. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$J_n := \int_0^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x.$$

Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et déterminer un développement asymptotique de J_n de précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x} . \end{array} \right.$$

Démontrer que f est définie, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Q1. — Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^x}\, \mathrm{d}t$.

Q2. — Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^n + t^{3/2}}\, \mathrm{d}t$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Étudier le domaine de définition de la fonction :

$$f\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

puis déterminer une expression simple de f.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(xt)}\, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Q2. — Donner une méthode pour calculer $f(n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q3. — La fonction est-elle continue (resp. uniformément continue) sur $\mathbf{R}$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Posons

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos(\theta))\, \mathrm{d}\theta. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $x f''(x) + f'(x) + x f(x)$.

□

Énoncé de l'exercice 29

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est bien définie et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)+f(-x)=1$.

Q2. — Calculer $f(k)$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

Q3. — Étudier les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Q4. — Déterminer un équivalent de $f(x)-1$ quand x tend vers $+\infty$.

Q5. — Démontrer que f est convexe sur $\mathbf{R}_+$ et concave sur $\mathbf{R}_-$.

□

Énoncé de l'exercice 30

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction bornée. Posons :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|} f(x-t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Exprimer g'' en fonction de g et de f.

□

Énoncé de l'exercice 31

Posons :

$$f : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x\,\mathrm{d}t.$$

Q1. — Démontrer que f est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.

Q2. — Calculer $f(1)$.

Q3. — Démontrer que, pour tout $x>-1$,

$$(x+2)\,f(x+2) = (x+1)\,f(x).$$

Q4. — En déduire un équivalent de $f(x)$ en -1^+.

Q5. — Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

Q6. — Démontrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

Q7. — En déduire $f'(0)$.

□

Énoncé de l'exercice 32

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Notons f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Calculer $f(0)$ à l'aide du changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$.

Q2. — Étudier les variations de f et déterminer sa limite en $+\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)}\,t^x\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et calculer f'.

Q2. — En déduire une expression de $f(x)$.

□

§ 3. TPE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Établir la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Démontrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Notons f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_{>0}$ et expliciter f'.

Q2. — En déduire une expression simple de f.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et :

$$I_n\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

Q1. — Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_n$ de I_n ?

Q2. — Calculer $I_1(x)$, pour tout $x \in \mathscr{D}_1$.

Q3. — Démontrer que I_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer I_n'.

Q4. — Trouver une relation simple entre I_n' et I_{n+1}.

Q5. — En déduire une expression de $I_n(x)$, pour tout $x \in \mathscr{D}_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. On souhaite démontrer que P admet au-moins une racine (théorème de d'Alembert-Gauß). Raisonnons par l'absurde et supposons que P ne possède aucune racine complexe.

Posons :

$$I \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{P\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.

Q2. — Démontrer que I est constante.

Q3. — Étudier la limite éventuelle de I en $+\infty$. Conclure.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Q1. — Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Q2. — Étudier la dérivabilité de f et déterminer une expression de f'.

Q3. — Déterminer une expression simple de f.

□

§ 4. MINES-TÉLÉCOM

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Q1. — Pour tout $(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, calculer :

$$J_{n,k} := \int_0^{+\infty} x^k\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Q2. — Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3\,\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

□

§ 5. ENSAM

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q2. — Vérifier que f est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y''+y=\dfrac{1}{x}$.

□

§ 6. NAVALE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Q1. — Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Q2. — Que dire de la régularité de f ?

Q3. — Déterminer la limite de f en $+\infty$.

□

§ 7. CENTRALESUPÉLEC

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Notons E l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ telles qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Pour toute fonction $f \in E$, on pose, sous réserve d'existence :

$$\mathscr{L}(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ p & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \quad [\textit{transformée de Laplace}].$$

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Q1. — Soit $f \in E$. Démontrer qu'il existe $a_f \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ tel que pour tout $p > a_f$, $t \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-at}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$, et pour tout $a < a_f$, $t \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-at}$ ne soit pas intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Q2. — Calculer a_f et $\mathscr{L}(f)$ pour :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t}. \end{array} \right.$$

Q3. — Soit $(n,\alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Calculer a_f et $\mathscr{L}(f)$ pour :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^n\,\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$

et comparer, pour tout $p > a_f$, $\mathscr{L}(f)(p)$ et $p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)$.

Q4. — Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$. Soit $(n,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}$. Calculer a_f et $\mathscr{L}(f)$ pour :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{array} \right.$$

et comparer, pour tout $p>a_f$, $\mathscr{L}(f)(p)$ et $p\mathscr{L}(f)(p)-f(0)$.

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$. Supposons qu'il existe $a\in\mathbf{R}$ tel que la fonction $t\longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-at}$ soit bornée sur $\mathbf{R}$.

Q5. — Démontrer que $\mathscr{L}\left(f'\right)$ est définie sur $]a,+\infty[$.

Q6. — Démontrer que, pour tout $p>a$:

$$f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Q7. — Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie sur $]a,+\infty[$.

Q8. — Lier $\mathscr{L}(f)$ et $\mathscr{L}(f')$.

□

§ 8. X

Énoncé de l'exercice 46

Soit $\varphi\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction bornée sur $\mathbf{R}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n^3\,x\,\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

Énoncé de l'exercice 47

Déterminer $\sup\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t\ :\ x\in\mathbf{R}_+^*\right\}$.

□

Énoncé de l'exercice 48

Posons :

$$f:x\longmapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa dérivabilité, sa limite éventuelle en $+\infty$, et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

□

Énoncé de l'exercice 49

Soit $a\in]0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cos(x))}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

□

Énoncé de l'exercice 50

Soient $a>1$ et $b>1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b-\cos(x)}{a-\cos(x)}\right)\mathrm{d}x$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 51

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$. On suppose que l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x tels que l'intégrale

$$\mathscr{L}(f)(x) := \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \qquad [\textit{transformée de Laplace}]$$

soit convergente est non vide.

Q1. — Quelle est la forme de $\mathscr{D}$?

Q2. — Si $\mathscr{L}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in [a, +\infty[$, où a est un certain réel, Démontrer que $\mathscr{L}(f)(x) = 0$, pour tout $x \in \mathscr{D}$.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 52

Q1. — Démontrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'intégrale :

$$I(a) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-a^2/4t}\,\mathrm{d}t$$

est définie.

Q2. — Calculer $I(a)$, pour tout $a \in \mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 53

Soit $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^b \sin(t)\,\mathrm{e}^{ix\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

quand x tend vers $+\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 54

Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$, avec $a < b$.

Soit une fonction $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ positive et de classe $\mathscr{C}^2$, admettant un unique maximum en $c \in]a, b[$. On suppose en outre $f''(c) \neq 0$.

Soit une fonction $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue, à valeurs strictement positives telle que $\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

Trouver un équivalent de $\int_a^b f^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

□

§ 9. ENS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 55

Déterminer un équivalent de $\int_0^{\pi/2} \sin\left(t^n\right)\,\mathrm{d}t$.

□