SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

par David Blottière, le 5 janvier 2024 à 21h27

TD 10

SOMMAIRE

§ 1. MISCELLANÉES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n\,(1-x). \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soit un réel $\alpha > 0$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha\, x\,(1-x)^n. \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & n^2\, e^{-nx}. \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbf{C}$. Pour tout $f \in E$, posons :

$$||f||_\infty := \sup_{x \in I} \left| f(x) \right|.$$

Q1. — Démontrer que $|| \cdot ||_\infty$ est une norme sur E.

Q2. — Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction g. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, g_n est bornée. Démontrer que g est bornée.

□

Énoncé de l'exercice 6

Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$.

Q1. — Démontrer qu'une série de fonctions normalement convergente sur I est uniformément convergente sur I.

Q2. — Soit $R > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_n : x \longmapsto \frac{n^2}{n!} x^n.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ est-elle uniformément convergente sur l'intervalle $[-R, R]$?

□

Énoncé de l'exercice 7

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que la suite de fonctions $\left((f_n)_{|[a,b[}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f_{|[a,b[}$.

Q1. — Démontrer que $f_n(b) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f(b)$.

Q2. — En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

□

Énoncé de l'exercice 8

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$, vers une fonction f.

Démontrer que :

$$\sup_{x \in [a,b]} f_n(x) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

après avoir justifié l'existence des nombres en jeu.

□

Énoncé de l'exercice 9

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles. On suppose que :

(H1) *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f ;*

(H2) *la fonction f est continue sur $[a, b]$;*

(H3) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[a, b]$.*

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.
Il s'agit d'un théorème dû à Dini.

Ulisse Dini (1845-1918)

□

Énoncé de l'exercice 10

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, e^{-nx}$, pour tout $x > 0$.

□

Énoncé de l'exercice 11

Posons, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\,e^{-nx}}{\ln(n)} \end{array} \right. .$$

Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $[0,+\infty[$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0 à droite.

□

Énoncé de l'exercice 12

Posons :

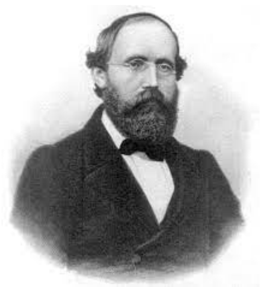
$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad [\textit{fonction zêta de Riemann}] .$$

Q1. — Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.

Q2. — Démontrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

Q3. — Calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \zeta(x)$, en justifiant son existence en cours d'étude.

Q4. — Calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} \zeta(x)$, en justifiant son existence en cours d'étude.



Bernhard Riemann (1826-1866)

□

Énoncé de l'exercice 13

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n f(x). \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $f(1) = 0$.

□

Énoncé de l'exercice 14

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Q1. — Justifier que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \exists\, x_n \in [a,b], \quad f_n(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f_n(x).$$

Q2. — Démontrer que la suite numérique $(f_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite.

Q3. — Justifier que la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence x.

Q4. — Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant f_n(x).$$

Q5. — Démontrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,b]$.

Q6. — Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que :

(H1) la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction g sur $[a,b]$;

(H2) pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction g_n est continue sur $[a,b]$;

(H3) la fonction g est continue sur $[a,b]$;

(H4) pour tout $x\in[a,b]$, la suite numérique $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g. Il s'agit d'un théorème dû à Dini.

Ulisse Dini (1845-1918)

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur I à valeurs réelles, convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Soit $g\colon \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction uniformément continue.

Q1. — Démontrer que la suite de fonctions $(g\circ f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $g\circ f$ sur I.

Q2. — Est-ce le cas si g est seulement supposée continue ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad \int_a^b f(x)\,x^n\,\mathrm{d}x=0.$$

Démontrer que f est nulle.

□

§ 2. CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Posons, pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$f_n \left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}\end{array}\right.$$

Q1. — Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q2. — Démontrer que pour tout $a>0$, cette suite de fonctions converge uniformément sur les intervalles $]-\infty,-a]$ et $[a,+\infty[$.

Q3. — Converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

On pose, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$f_n\colon x\longmapsto (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}.$$

Q1. — Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Q2. — Justifier l'existence de :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$

et la calculer.

□

Énoncé de l'exercice 19

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.

Q1. — Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_n\colon x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$

Q2. — Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q3. — Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur un intervalle $[a,+\infty[$ (avec $a>0$) puis sur $]0,+\infty[$.

□

Énoncé de l'exercice 20

Soient a et b des nombres réels tels que $a<b$.

Q1. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, soit $x_0 \in [a,b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f et que pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est continue en x_0. Démontrer que f est continue en x_0.

Q2. — Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $x\in[0,1]$, posons :

$$g_n(x) = x^n.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

□

Énoncé de l'exercice 21

Q1. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Démontrer qu'alors la suite de terme général :

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q2. — Justifiez que ce résultat peut être utilisé pour les séries de fonctions puis démontrer que :

$$\int_0^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

□

Énoncé de l'exercice 22

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par, pour tout $n\in\mathbf{R}^*$:

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n}. \end{array}\right.$$

On pose, lorsque la série converge :

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right].$$

Q1. — Démontrer que S est définie et dérivable sur $[0,1]$.

Q2. — Calculer $S'(1)$.

□

Énoncé de l'exercice 23

On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n\colon x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Q1. — Étudier la convergence simple de cette série.

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des réels x pour lesquels cette série converge.

Q2. — Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $\mathscr{D}$.

Q3. — La fonction :

$$S \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \end{array} \right.$$

est-elle continue sur $\mathscr{D}$?

□

Énoncé de l'exercice 24

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right). \end{array} \right.$$

Q1. — Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur tout segment $[-a, a]$, avec $a > 0$.

Q3. — Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$.

□

Énoncé de l'exercice 25

Q1. — Soit $x > 0$. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(nx)}$ converge.

Q2. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(nx)} \end{array} \right.$$

est continue.

Q3. — Démontrer que la fonction $x \longmapsto x^2 f(x)$ se prolonge par continuité en 0.

□

Énoncé de l'exercice 26

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$f_n\colon x \longmapsto \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Q1. — Étudier la convergence simple, la convergence uniforme, de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q2. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

□

Énoncé de l'exercice 27

On considère la fonction :

$$S\colon x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

Q1. — Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

Q2. — Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q3. — Démontrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0 à droite.

□

Énoncé de l'exercice 28

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, avec $a<b$. Notons $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur $[a,b]$ telle que $f_0 \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $x\in[a,b]$:

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. — Démontrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,b]$.

Q2. — Déterminer la somme de cette série.

□

Énoncé de l'exercice 29

Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f\colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^x}$$

puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur ce domaine.

□

Énoncé de l'exercice 30

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, posons :

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n(1-x)}{\ln(n)} \end{array}\right. .$$

Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

□

Énoncé de l'exercice 31

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+e^{nx}} \end{array}\right. .$$

Q1. — Étudier la convergence de la série de terme général f_n.

Q2. — Démontrer que l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

□

Énoncé de l'exercice 32

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^2x}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_{>0}$.

Q2. — Soit $a > 0$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. En déduire que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbf{R}_{>0}$.

Q3. — Déterminer la limite, ainsi qu'un équivalent simple, de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers 0.

□

Énoncé de l'exercice 33

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx+1}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Q2. — La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge-t-elle normalement sur un segment de $]0,+\infty[$?

Q3. — À l'aide d'une majoration du reste, démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

Pour tout $x > 0$, notons :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}.$$

Q4. — Écrire f comme somme d'une série convergeant normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

□

Énoncé de l'exercice 34

Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $\mathbf{R}$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement ?

Q2. — Démontrer à l'aide du reste, que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément.

Q3. — Déteminer la limite de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ en $+\infty$.

□

Énoncé de l'exercice 35

Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}\,x}{n+x^2} \end{array}.$$

Q1. — Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

Q2. — Démontrer, à l'aide du reste, que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément.

Q3. — Démontrer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Posons :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Q1. — Déterminer le domaine de définition de f.

Q2. — Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

Q3. — Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 1.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Donner l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}.$$

Étudier la continuité de f et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, en justifiant son existence en cours d'étude.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Soit $a \in\,]-1,1[$. *Posons :*

$$f \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(a^n\,x\right) \end{array}.$$

Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

□

§ 3. NAVALE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, *posons :*

$$u_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+n^2\,x} \end{array}.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(u_n'\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}}. \end{array} \right.$$

Q1. — Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Q2. — Étudier la limite éventuelle de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

□

§ 4. TPE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Q1. — Donner l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Q2. — Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1, sachant que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.

□

§ 5. CENTRALE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Q1. — Rappeler le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un réel $a \in]0,1[$ et une fonction $f : [0,a] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $f(0) = 0$.

Q2. — Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \exists P \in \mathbf{R}[X], \quad \forall x \in [0,a], \quad \left|P\left(x^n\right) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Q3. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $Q = \sum_{k=1}^{d} b_k X^{kn} \in \mathbf{R}[X]$ et $R = \sum_{k=1}^{d} \lfloor b_k \rfloor X^{kn}$. Démontrer que :

$$\forall x \in [0,a], \quad |Q(x) - R(x)| \leqslant \frac{a^n}{1-a^n}.$$

Q4. — Établir l'existence d'une suite de polynômes à coefficients entiers convergeant uniformément sur $[0,a]$ vers f.

Q5. — Soit $g \in \mathscr{C}^0([0,a],\mathbf{R})$. À quelle condition existe-t-il une suite de polynômes à coefficients entiers convergeant uniformément vers g sur $[0,a]$?

Q6. — Soient $\varepsilon > 0$, $(x_1,\ldots,x_n) \in [0,a]^n$ et $h \in \mathscr{C}^0([0,a],\mathbf{R})$. Établir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$(\forall x \in [0,a], \quad |P(x) - h(x)| \leqslant \varepsilon) \quad \text{et} \quad \big(\forall i \in [\![1,n]\!], \quad P(x_i) = h(x_i).\big)$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Posons :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \inf\limits_{n\in\mathbf{Z}} |x-n| = d(x,\mathbf{Z}). \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que φ est continue sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Tracer la courbe représentative de φ.

Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x). \end{array} \right. \qquad \textit{[fonction de Takagi]}$$

Teiji Takagi (1875-1960)

Q3. — Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Q4. — Posons, pour $n \in \mathbf{N}$, $h_n = \dfrac{1}{2\cdot 4^n}$. Démontrer que :

$$\left| \frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} \right| \geqslant \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$

En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Q5. — Démontrer que f n'est nulle-part dérivable.

§ 6. MINES PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Q1. — Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1 + x n^2}.$$

Q2. — Déterminer la limite éventuelle, puis un équivalent, de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0^+.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Soit $R(X)$ une fraction rationnelle à coefficients complexes de degré strictement négatif, ne possédant aucun pôle dans $\mathbf{Z}$.

Q1. — Étudier la définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} R(n)\, e^{inx}.$$

Q2. — Étudier sa continuité.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 46

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}^- & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est bien définie.

Q2. — Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-, \quad f(x) = \mathrm{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}.$$

Q3. — En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 47

Posons :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Q1. — Déterminer le domaine de définition de f.

Q2. — Étudier la continuité de f.

Q3. — Déterminer un équivalent de f en 1^-.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 48

Posons

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} := \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n)^2}. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est bien définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Est-elle périodique ?

Q2. — Étudier la continuité de f.

Posons :

$$g : x \longmapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

Q3. — Déterminer le domaine de définition de g.

Q4. — Démontrer que la fonction $h := f - g$ admet un prolongement continu $\mathbf{R}$.

Q5. — Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x).$$

En déduire que $f = g$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 49

Posons f_0 la fonction nulle sur $\mathbf{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_{n+1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x + f_n(x)} \end{array} \right.$$

.

Q1. — Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Déterminer la limite $\ell(x)$ de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$.

Q2. — Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}_+$.

Q3. — Soit $(x, n) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{N}$. Démontrer que :

$$\left|f_{n+1}(x) - \ell(x)\right| \leqslant \frac{\left|f_n(x) - \ell(x)\right|}{2\, f_{n+1}(x)}.$$

Que peut-on en déduire sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 50

Posons :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis étudier la continuité de f sur son ensemble de définition et les limites éventuelles de f aux bornes de son ensemble de définition.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 51

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right). \end{array} \right.$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}_+$ de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

§ 7. X

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 52

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2\,x\,(1-x). \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0,1\}\,; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Q2. — Démontrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la fonction constante $\dfrac{1}{2}$ uniformément sur tout segment de $]0,1[$.

Q3. — Soient a, b tels que $0 < a < b < 1$. Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dense dans $\mathscr{C}^0([a,b])$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 53

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. On suppose que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \exists\, L_n \subset [n, +\infty[\text{ fini}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \exists\, i \in L_n, \quad \left|f(x) - f_i(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Q1. — La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement uniformément vers f ?

Q2. — Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue en x_0. Démontrer que f est continue en x_0.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 54

Posons :

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_{n+1} \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f_n(t)|}\, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

§ 8. ENS

Énoncé de l'exercice 55

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \colon x \longmapsto \frac{1}{n!}\, x^n\, (1-x)^n.$$

Q1. — Démontrer que :

$$\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}.$$

Q2. — Soit $p \in \mathbf{N}^*$. En considérant :

$$\int_0^1 p^{2n+1}\, e^{px}\, f_n(x)\, \mathrm{d}x$$

démontrer que e^p est irrationnel.

Q3. — Par une méthode similaire, démontrer que π^2 est irrationnel.

□

Énoncé de l'exercice 56

Q1. — Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ une fonction croissante. Démontrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales croissantes.

Q2. — Reprendre la question précédente en supposant uniquement f continue et croissante.

□

Énoncé de l'exercice 57

Q1. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n\, x)}{2^n} \end{array} \right.$$

est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Étudier sa dérivabilité en 0.

□