FAMILLES SOMMABLES

TD 9

par David Blottière, le 10 décembre 2023 à 16h42

SOMMAIRE

§ 1. MISCELLANÉES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

La famille $\left(\frac{1}{r^2}\right)_{r \in \mathbf{Q}_{\geqslant 1}}$ est-elle sommable ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. *Pour tout* $(n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, *posons* $u_{n,m} = \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{m^\beta}$.

Pour quelles valeurs de α et β la famille $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$ est-elle sommable ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. *On s'intéresse à la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$.

Q1. — Soit $p \geqslant 2$. Déterminer le cardinal de l'ensemble fini $I_p = \{(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \,:\, n+m = p\}$ En déduire que la valeur de la somme $\sum_{(n,m) \in I_p} \frac{1}{(n+m)^\alpha}$.

Q2. — Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Q1. — Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, *notons :*

$$u_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \geqslant m+1 \\ 0 & \text{si } n \leqslant m. \end{cases}$$

Q2. — Soit $m \in \mathbf{N}$. Démontrer que :

$$\forall\, n \geqslant m+2, \quad \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{m!}\left(1 + \sum_{k=m+2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\right).$$

Q3. — En déduire que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_{n,m}$ converge, et que sa somme est majorée par $\frac{2}{m!}$.

Q4. — Démontrer que la série de terme général $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge, puis que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

□

Énoncé de l'exercice 5

Soit I un ensemble dénombrable. Pour tout $p \geqslant 1$, nous notons $\ell^p(I, \mathbf{C})$ l'ensemble des familles de complexes dont la puissance p-ième est sommable :

$$\ell^p(I, \mathbf{C}) := \left\{(u_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I \ : \ \text{la famille } \left(|u_i|^p\right)_{i \in I} \text{ est sommable}\right\}.$$

Q1. — Soient $(u_i)_{i \in I}$, $(v_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbf{C})$. Démontrer que $(u_i v_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbf{C})$.

Q2. — Montrer que $\ell^2(I, \mathbf{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^I$.

Q3. — Soit $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbf{C})$. Démontrer que $J := \{i \in I \ : \ |u_i| \geqslant 1\}$ est fini.

Q4. — En déduire que $\ell^1(I, \mathbf{C}) \subset \ell^2(I, \mathbf{C})$.

□

Énoncé de l'exercice 6

Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) \cdot z^n.$$

□

Énoncé de l'exercice 7

On rappelle que les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ sont notées respectivement $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Q1. — Notons $I = \left\{(n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \ : \ n \text{ divise } m\right\}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{n^2 m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Q2. — Notons, pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, $J_d := \left\{(n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \ : \ n \wedge m = d\right\}$. Démontrer que :

$$\zeta(2)^2 = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{(n,m) \in J_d} \frac{1}{n^2 m^2}.$$

Q3. — Exprimer $\displaystyle\sum_{(n,m) \in J_1} \frac{1}{n^2 m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

□

Énoncé de l'exercice 8

Étant données deux famille sommables de complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, posons :

$$u \star v = \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k v_{n-k}\right)_{n \in \mathbf{Z}}.$$

Q1. — Démontrer que la loi $\star$ est bien définie et que :

$$\forall \ (u = (u_n)_{n \in \mathbf{Z}}, v = (v_n)_{n \in \mathbf{Z}}) \in \ell^1(\mathbf{Z}, \mathbf{C})^2, \quad u \star v \in \ell^1(\mathbf{Z}, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} (u \star v)_n = \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} v_n\right).$$

Q2. — Démontrer que la loi $\star$ possède un élément neutre.

Q3. — L'ensemble $\ell^1(\mathbf{Z}, \mathbf{C})$ muni de la loi $\star$ est-il un groupe ?

□

Énoncé de l'exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de carré sommable, i.e. telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Q1. — Démontrer que pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n \cdot u_{\sigma(n)}$ converge.

Q2. — Calculer $\inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot u_{\sigma(n)} \,:\, \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})\right\}$.

$\square$

§ 2. CentraleSupélec

Énoncé de l'exercice 10

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série semi-convergente (i.e. convergente mais non-absolument convergente) de nombres réels.

Démontrer que pour tout $\ell \in \mathbf{R}$, il existe $\sigma \in (\mathbf{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$.

$\square$

§ 3. X

Énoncé de l'exercice 11

Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{m^2n + n^2m + 2mn}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

$\square$

Énoncé de l'exercice 12

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes telle que :

$$\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \quad n \neq m \quad \Longrightarrow \quad |z_n - z_m| \geqslant 1.$$

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{z_n^3}$ est convergente.

$\square$

Énoncé de l'exercice 13

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries convergentes de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Démontrer que :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\sum_{n}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

En d'autres termes, si deux séries sont semi-convergentes, leur produit de Cauchy peut diverger (cf. cours), mais il converge au sens de Cesàro vers le produit de leurs sommes.

$\square$

§ 4. Écoles normales supérieures

Énoncé de l'exercice 14

Q1. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. Démontrer que :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \text{ converge}\right) \iff \left(\forall\,\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N}),\quad \sum_{n\geqslant 0} a_{\sigma(n)} \text{ converge}\right).$$

Q2. — Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} |c_n - 1| \text{ converge}\right) \iff \left(\exists\, a \in \mathbf{C}^*,\quad \forall\,\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N}),\quad \prod_{k=0}^{n} c_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.\right)$$

□