SÉRIES NUMÉRIQUES

TD 8

par David Blottière, le 13 décembre 2023 à 05h38

SOMMAIRE

§ 1. LES GAMMES 1
§ 2. MISCELLANÉES 3
§ 3. CCINP 5
§ 4. NAVALE 7
§ 5. TPE 8
§ 6. ENSAM 8
§ 7. ENSEA 9
§ 8. MINES-TÉLÉCOM 9
§ 9. CENTRALESUPÉLEC 9
§ 10. MINES-PONTS 11
§ 11. X 12
§ 12. ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES 13

§ 1. LES GAMMES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{n!}{n^n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{(2n)!}{n^n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \mathrm{ch}\left(n^\alpha\right) - \mathrm{sh}\left(n^\alpha\right)$, où $\alpha \in \mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{3^n}{n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{n!\,x^n}{n^n}$, où $x \in \mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{n}{3+\cos(n)}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := (\cos(n) + \sin(n))\, e^{-n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{\sin(n)}{n^{3/2}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := e^{1/n} - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := 3^{1/n} - 2^{1/n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

□

§ 2. MISCELLANÉES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$ converge et calculer sa somme.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et de $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de réels strictement positifs tels que* $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$.

Démontrer que si $\ell < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, et que si $\ell > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$ converge et calculer sa somme.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := \dfrac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Donner un équivalent simple de $u_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+\sqrt{k}}$ et démontrer qu'il existe une constante réelle C telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + C + \mathrm{o}(1)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Démontrer que la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ converge et donner un développement asymptotique de u_n de précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Donner un développement asymptotique à deux termes de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Q1. — Donner un équivalent de $u_n := \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$.

Q2. — Démontrer que la suite de terme général $v_n := u_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$ converge vers un réel ℓ et donner un équivalent de $v_n - \ell$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent.

Démontrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} \max\{u_n, v_n\}$, $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$, et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ convergent.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Pour tout $x>1$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^x}$, en fonction $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n := H_n - \ln(n)$.

Q1. — Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ est convergente.

Q2. — Expliciter $u_{n+1} - u_n$, puis démontrer :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

où $\gamma := 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

Q3. — En écrivant $H_n - \ln(n) - \gamma$ comme le reste d'une série convergente, démontrer :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Q4. — En écrivant $\frac{1}{2n}$ comme le reste d'une série convergente, démontrer :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

□

§ 3. CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Étudier, pour tout $\alpha\in\mathbf{R}$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle à termes strictement positifs et* $\ell \in]0,1[$.

Q1. — Supposons que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

Q2. — Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n}{(3n+1)!}$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles à termes positifs telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Q1. — Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Q2. — Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(n-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}-1}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle décroissante à termes strictement positifs et convergeant vers* 0.

Q1. — Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Q2. — Déterminer un majorant du reste de cette série.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{a^n}{1+b^n}$ en fonction des valeurs des réels a et de b.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 46

Déterminer la nature de la série $\sum \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 47

Déterminer la nature de la série $\sum(1-\operatorname{th}(n))$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 48

Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 49

Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\pi n^3 + \dfrac{1}{n^2} + 1\right)$.

□

Énoncé de l'exercice 50

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Q1. — Déterminer la nature de la suite de terme général $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ suivant les valeurs de a et b.

Q2. — Étudier la convergence de u_n selon les valeurs de a et b.

□

Énoncé de l'exercice 51

Déterminer, pour tout $\alpha > 0$, la nature de la série $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

□

Énoncé de l'exercice 52

Déterminer la nature, selon la valeur du réel α, de la série $\sum \dfrac{n^\alpha (\ln(n))^n}{n!}$.

□

Énoncé de l'exercice 53

Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *telle que* $u_0 > 0$ *et, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

Donner la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

□

Énoncé de l'exercice 54

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, *posons* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Q1. — Démontrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

Q2. — Étudier la convergence de la suite de terme général $R_n\,(n+1)!$.

Q3. — Déterminer la nature de la série $\sum \sin(2\pi e n!)$.

□

Énoncé de l'exercice 55

Soit (u_n) *une suite de réels strictement positifs.*

Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

□

§ 4. Navale

Énoncé de l'exercice 56

Déterminer, selon la valeur du réel α, la nature de la série $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

□

§ 5. TPE

Énoncé de l'exercice 57

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.

□

Énoncé de l'exercice 58

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$.

Q1. — Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Q2. — Déterminer sa somme. On cherchera a, b tels que $\dfrac{1}{n^2+3n+3} = \dfrac{a-b}{1+ab}$ et $a = b+1$.

□

Énoncé de l'exercice 59

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1} \quad , \quad u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3} \quad , \quad u_{3n+3} = \frac{-1}{2n+2}.$$

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et déterminer sa somme.

□

Énoncé de l'exercice 60

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)2^n}$ converge et déterminer sa somme.

□

Énoncé de l'exercice 61

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k\pi/3)}{k}$.

Q1. — Trouver a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$T_n = a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} + b\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1} + c\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+2}.$$

Q2. — Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

□

§ 6. ENSAM

Énoncé de l'exercice 62

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Q1. — Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

Q2. — Déterminer une majoration de son reste.

Q3. — Déterminer un rang à partir duquel la différence entre la somme et la somme partielle est majorée par 10^{-3}.

Q4. — Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et vérifier le résultat précédent.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 63

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Q1. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie.

Q2. — Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et déterminer sa somme.

□

§ 7. ENSEA

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 64

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $c(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

Étudier la convergence et, le cas échéant, la somme de la série $\sum \frac{c(n)}{n(n+1)}$.

□

§ 8. MINES-TÉLÉCOM

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 65

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{\cos(u_n)}{n+1}$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 66

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \textit{et} \qquad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

□

§ 9. CENTRALESUPÉLEC

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 67

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 68

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

Q1. — Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Démontrer que la série $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ converge.

Q2. — Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ diverge et la série $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ converge.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 69

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, posons* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

Q1. — Déterminer un équivalent de u_n.

Q2. — Démontrer qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + \mathrm{o}(1)$.

Q3. — Démontrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.

Q4. — En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 70

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite convergeant vers* 0 *et soient* a, b, c *tels que* $a+b+c \neq 0$.

Démontrer que les séries

$$\sum u_n \qquad \text{et} \qquad \sum a u_n + b u_{n+1} + c u_{n+2}$$

ont même nature.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 71

Pour tout $n \in \mathbf{N}$*, notons* $u_n = \sqrt{\ln\left(n^2+1\right)} - \sqrt{\ln\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)}$.

Déterminer la nature de $\sum u_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 72

Q1. — Rappeler le théorème de comparaison des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Q2. — En déduire le théorème de Cesàro.

Q3. — Démontrer que la suite de terme général $(-1)^n$ converge au sens de Cesàro.

Q4. — Soit $x \in \mathbf{R}$. Démontrer que la suite de terme général $\cos(nx)$ converge au sens de Cesàro.

Q5. — Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes positifs convergeant vers 0 au sens de Cesàro, mais ne convergeant pas vers 0 au sens usuel.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite à termes strictement positifs convergeant vers* 0 *au sens de Cesàro. Pour tout* $N \in \mathbf{N}^*$*, notons :*

$$E_N = \left\{ k \in [\![1, N]\!] \;:\; u_k \leqslant \sqrt{\frac{u_1 + \ldots + u_N}{N}} \right\}.$$

Posons également $E = \bigcup_{N\in\mathbf{N}^*} E_N$.

Q6. — Démontrer que $\frac{1}{N}\,\mathrm{Card}\left(E \cap [\![1, N]\!]\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 73

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 1$, posons :

$$v_n = \frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

Q1. — Soit $\alpha > 0$, posons $u_n = n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Étudier la convergence et l'éventuelle limite de $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Q2. — Supposons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$. Démontrer que :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{an^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Q3. — Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a > 0$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p u_k$.

□

§ 10. MINES-PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 74

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes positifs. Supposons qu'il existe un réel a tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^a}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 75

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} E(\log k)$, où log *est le logarithme décimal, et $T_n = S_{10^n-1}$.*

Q1. — Déterminer des équivalents de S_n et T_n.

Q2. — Calculer directement T_n et retrouver le résultat précédent.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 76

Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 77

Q1. — Soit $\alpha > 1$. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

Q2. — Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 2$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} P(k)$.

□

Énoncé de l'exercice 78

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+$, la nature de la série $\sum \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} e^{i\ln(n)}$.

□

Énoncé de l'exercice 79

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, la nature de la série $\sum (-1)^n \frac{E(n^{1/4})}{n^\alpha}$.

□

Énoncé de l'exercice 80

Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.

□

Énoncé de l'exercice 81

Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\prod_{k=2}^{n} k^k\right)^{-4/n^2}$.

□

Énoncé de l'exercice 82

Soient a et b des réels strictment positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^b}$.

Déterminer la nature de $\sum a^{s_n}$.

□

§ 11. X

Énoncé de l'exercice 83

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge.

Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

□

Énoncé de l'exercice 84

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Q1. — Supposons que $\sum u_n$ diverge. Soit $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Q2. — Supposons que $\sum u_n$ converge. Notons R_n son reste d'ordre n et considérons un réel $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 85

Soit (α_n) une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers l'infini.

Démontrer qu'il existe une suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum \alpha_n u_n$ diverge.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 86

Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs.

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n}$. On pourra montrer pour cela que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} \geqslant \frac{1}{2}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 87

Donner un équivalent de la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 88

Soit (u_n) une suite de complexes telle que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Supposons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 89

On cherche à déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction de α.

Q1. — Que dire si $\alpha > 1$?

Q2. — Démontrer que la série converge si $\dfrac{1}{2} < \alpha$. On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.

Q3. — Démontrer que la série diverge si $\alpha = \dfrac{1}{2}$. On pourra commencer par donner un développement asymptotique de $\cos\left(\pi\sqrt{n+1}\right) - \cos\left(\pi\sqrt{n}\right)$.

Q4. — Démontrer que la série diverge si $\alpha < \dfrac{1}{2}$. On pourra se ramener au cas précédent à l'aide d'une transformation d'Abel.

□

§ 12. ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 90

Notons $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, etc).

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 91

Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de réels strictement positifs.*

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(b_1 \dots b_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{b_1 + \dots + b_n}{n}$.

Q2. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(b_1 \dots b_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

Q3. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes positifs telle que la série $\sum a_n$ converge. Démontrer que la série de terme général $(a_1 \dots a_n)^{1/n}$ converge, et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \dots a_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

□