INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

TD 7

par David Blottière, le 28 novembre 2023 à 06h13

SOMMAIRE

§ 1. LES GAMMES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

La fonction $f\colon t \longmapsto \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(1+|\sin(t)|)}{1+t}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sin^3(t)}{t^2}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t}\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right)$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\arctan\left(t^2+1\right)}{t^2+1}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

La fonction $f: t \longmapsto \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

La fonction $f: t \longmapsto t\left(\frac{1}{t}-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

La fonction $f: t \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(t)}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

La fonction $f: t \longmapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

La fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{x^x}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

La fonction $f: u \longmapsto \frac{\ln(u)}{u^2+1}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

La fonction $f: t \longmapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

La fonction $f: t \longmapsto \frac{\ln(\sin(t))}{t}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

La fonction $f: t \longmapsto \frac{1}{t^{3/2}}\sqrt{\sin\left(t^2\right)}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

La fonction $f: t \longmapsto \ln(t)\ln(1-t)$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

La fonction $f : t \longmapsto e^{-1/t^2}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

La fonction $f : t \longmapsto e^{1/\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

La fonction $f : t \longmapsto e^{1/\sqrt{-\ln(t)}}$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}\, e^{-\frac{1}{t}} \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{3/2}}\, dt$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\ln(t)}\, dt$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2/3}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(e^{-2x} - e^{-x}\right)\sin(x)}{(1-\cos(x))\sqrt{\tan(x)}}\, dx$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt$ et calculer sa valeur.

□

Énoncé de l'exercice 27

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 28

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 29

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 30

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3}-1}{t(1+t)^{2/3}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 31

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3}-1}{t(1+t)^{2/3}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 32

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{3\cos^2(t)+1}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 33

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 34

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\mathrm{e}^t+1\right)\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 35

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

Énoncé de l'exercice 36

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. □

§ 2. Miscellanées

Énoncé de l'exercice 37

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^{\beta}}\, \mathrm{d}x$ en fonction du triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$.

□

Énoncé de l'exercice 38

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha} \left(\mathrm{e}^{\beta x} - 1\right) \mathrm{d}x$ en fonction du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 39

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^{\alpha}}{1 - t^{\beta}}\, \mathrm{d}t$ en fonction du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 40

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^{\alpha})}{x^{\beta}}\, \mathrm{d}x$ en fonction du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 41

Déterminer les natures des intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln(x)^{\beta}}\, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{\alpha} (-\ln(x))^{\beta}}\, \mathrm{d}x$ en fonction du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 42

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{a} (1 - t)^{b}}\, \mathrm{d}t$ en fonction du couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 43

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{a}}{1 + t^{b}}\, \mathrm{d}t$ en fonction du couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 44

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a}\, \mathrm{e}^{-t}}{1 + t^{b}}\, \mathrm{d}t$ en fonction du couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

□

Énoncé de l'exercice 45

À quelle condition sur le réel a la fonction $t \longmapsto \dfrac{t - \sin(t)}{t^{a}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

□

Énoncé de l'exercice 46

Notons :

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence de ces deux intégrales et les calculer. On pourra calculer $I+J$ et $I-J$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 47

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ *tel que* $a^2 - 4b < 0$.

Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+at+b}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 48

Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q1. — Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

Q2. — Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ après avoir donné une signification à cette intégrale.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 49

Étudier l'intégrabilité de la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\sin(t)}$ sur $[0,+\infty[$. On pourra commencer par donner l'allure de la courbe représentative de f.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 50

Étudier l'intégrabilité de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

sur l'intervalle $]0,1]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 51

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([0,+\infty[,\mathbf{R})$ *une fonction intégrable.*

Démontrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels convergeant vers $+\infty$ telle que $x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

□

§ 3. CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 52

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, *posons* $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$.

Q1. — Justifier que I_n est bien définie.

Q2. — Démontrer que la suite $((-1)^n I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et déterminer sa limite.

Q3. — La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

□

Énoncé de l'exercice 53

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est-elle intégrable sur $]1,+\infty[$?

□

Énoncé de l'exercice 54

Démontrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[\pi,+\infty[$.

□

Énoncé de l'exercice 55

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$ converge et calculer sa valeur.

□

Énoncé de l'exercice 56

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ converge et calculer sa valeur.

□

Énoncé de l'exercice 57

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(x^2\right)dx$ converge et calculer sa valeur.

□

Énoncé de l'exercice 58

Étudier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de la fonction $f : t \longmapsto (t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1 - \dfrac{\ln(t)}{t}$.

□

Énoncé de l'exercice 59

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor dx$ converge et calculer sa valeur.

□

§ 4. Navale

Énoncé de l'exercice 60

Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ et $a>0$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-at}\,dt$ converge.

Montrer que pour tout $x>a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,dt$ converge.

□

§ 5. Tpe

Énoncé de l'exercice 61

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} - \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor dx$ converge et calculer sa valeur.

□

§ 6. ENSAM

Énoncé de l'exercice 62

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *deux suites réelles définies par* $u_0 := a > 0$, $v_0 := b > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$u_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \textit{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Q1. — Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite $M(a,b)$.

Q2. — Justifier l'existence de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{b^2+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Q3. — Démontrer que $I(a,b) = \dfrac{1}{a}\, I\left(1, \dfrac{b}{a}\right)$.

Q4. — Montrer que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right) \end{array} \right.$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Q5. — l'utilisant pour une changement de variables, relier $I(a,b)$ et $I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

Q6. — Relier enfin $I(a,b)$ et $M(a,b)$.

□

§ 7. Mines-Télécom

Énoncé de l'exercice 63

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right) \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x$, où a est un paramètre réel.

□

Énoncé de l'exercice 64

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor\, \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

□

§ 8. CentraleSupélec

Énoncé de l'exercice 65

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

□

Énoncé de l'exercice 66

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ *intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et monotone au voisinage de* $+\infty$.

Q1. — Démontrer que pour tout $h > 0$, la série de terme $\sum f(nh)$ est convergente.

Q2. — Démontrer que :

$$h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Énoncé de l'exercice 67

Q1. — Démontrer que :

$$\exists C>0,\quad \forall \lambda>0,\quad \forall (a,b)\in \mathbf{R}^2,\quad \left|\int_a^b e^{i\lambda t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

Soient $\lambda>0$ et $f\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tels que $f''\geqslant\lambda$. On veut Démontrer l'existence d'un réel $C>0$, indépendant de λ, tel que :

$$\forall (a,b)\in\mathbf{R}^2,\quad \left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right|\leqslant\frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

Q2. — Étudier les variations et les limites de f' et de f.

Q3. — Démontrer que f a une borne inférieure et que celle-ci est un minimum.

Q4. — Pourquoi peut-on supposer que le minimum de f est atteint en 0 et vaut 0 ?

Notons g la restriction de f à $\mathbf{R}^+$ et posons $h=g'\circ g^{-1}$.

Q5. — Calculer h' et démontrer que pour tout $t\in\mathbf{R}^+$, $h(t)\leqslant\sqrt{2\lambda t}$.

Q6. — Conclure en s'inspirant du cas où f est la fonction $t\longmapsto\lambda t^2$.

□

Énoncé de l'exercice 68

Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ telle que f et f'' soient intégrables.

Démontrer que $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

□

Énoncé de l'exercice 69

Q1. — Les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos^2(t)\,dt$ sont-elles convergentes ?

Q2. — Plus généralement, étudier la convergence d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,P(\cos(t))\,dt$, où P est un polynôme.

□

Énoncé de l'exercice 70

Pour tout $a\in\mathbf{C}$, on note $I(a)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|e^{it}-a\right|\,dt$.

Q1. — Démontrer l'existence de $I(0)$ et donner sa valeur.

Q2. — Démontrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\,dt$ et en déduire l'existence de $I(1)$.

Q3. — Démontrer que, pour tout $a\in\mathbf{C}$, $I(a)$ existe et que $I(a)=I(|a|)$.

Soit $P\in\mathbf{C}[X]$, notons $M(P)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left(\left|P\left(e^{it}\right)\right|\right)\,dt$.

Q4. — Démontrer que $M(P)$ existe pour tout polynôme P non nul.

Q5. — Démontrer que, pour tout $b>0$ et tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a $M(X^n-b^n)=n\,M(X-b)$.

Q6. — Déterminer la valeur de $M(X-b)$, pour tout $b\in]0,1[$, puis, pour tout $b>1$.

Q7. — Calculer $M(X-1)$.

Q8. — Calculer $M(P)$, pour tout $P\in\mathbf{C}[X]$ non nul.

□

§ 9. MINES-PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 71

Étudier en fonction du réel a la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^a+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 72

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 73

Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t\ln(t)}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 74

Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 75

Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 76

Q1. — Déterminer l'ensemble A des réels a tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+at+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. — Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+at+1}\,\mathrm{d}t$ lorsque $a\in A$.

Q3. — Déterminer l'ensemble B des réels b tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+bt+b^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q4. — Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+bt+b^2}\,\mathrm{d}t$ lorsque $b\in B$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 77

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(-1)^{\lfloor 1/x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur, cas échéant.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 78

Soit la fonction :

$$B\colon (r,s)\longmapsto \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,\mathrm{d}x \qquad \left[\textit{fonction bêta d'Euler}\right].$$

Q1. — Déterminer l'ensemble des couples $(r,s)\in\mathbf{R}^2$ tel que $B(r,s)$ existe.

Q2. — Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 79

Justifier l'‘’existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 80

Q1. — Soit $\lambda > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\lambda^2 \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Q2. — Discuter selon la valeur de $a > 0$ l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^a \sin^2(x)}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 81

Notons $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Q1. — Justifier l'existence de I.

Q2. — Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q3. — Démontrer que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q4. — Donner la valeur de I.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 82

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q1. — Déterminer les racines du polynôme $X^{n-1} + \ldots + X + 1$.

Q2. — En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Q3. — En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.

□

§ 10. X

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 83

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ *une fonction positive, décroissante et intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Démontrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 84

Soient $f \in \mathscr{C}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ *une fonction positive et décroissante. Posons*

$$g \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\sin(x). \end{array}$$

Démontrer que f est intégrable si et seulement si g est intégrable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 85

Q1. — Démontrer que la fonction :

$$F \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

a une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.

Q2. — Donner un équivalent en $+\infty$ de la fonction $G\colon \lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{i\lambda t^2}\,\mathrm{d}t$.

□