Espaces vectoriels normés

TD 6

par David Blottière, le 20 novembre 2023 à 19h48

Sommaire

§ 1. Miscellanées

Énoncé de l'exercice 1

Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ définies pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par :

$$||P||_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k| \qquad et \qquad ||P||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

Q1. — Démontrer que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ sont des normes.

Q2. — Sont-elles équivalentes ?

Q3. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ sont équivalentes.

□

Énoncé de l'exercice 2

Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ définies, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, par :

$$||P||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \qquad et \qquad ||P||'_1 = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Q1. — Vérifier que $||\cdot||'_1$ est bien une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

Q2. — Les normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ sont-elles équivalentes ?

Q3. — Démontrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ sont équivalentes.

□

Énoncé de l'exercice 3

Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ définies pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par :

$$||P||_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k| \qquad et \qquad ||P||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

Notons $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes de terme général $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

Q1. — Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour les normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$.

Q2. — Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente pour la norme $||\cdot||_\infty$.

Q3. — Munissons $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||'_\infty$ définie par :

$$\forall f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R}),\quad \big|\big|f\big|\big|'_\infty=\sup_{x\in[0,1]}\big|f(x)\big|.$$

Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, vue comme suite d'éléments de $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$, converge. Déterminer sa limite.

Q4. — La suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle dans $(\mathbf{R}[X],||\cdot||'_\infty)$?

□

Énoncé de l'exercice 4

Munissons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$||(u_n)_{n\in\mathbf{N}}||_\infty=\sup_{n\in\mathbf{N}}|u_n|.$$

Q1. — Notons $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ telle que pour tout k, u_k soit la suite constante de terme général $\dfrac{1}{k+1}$. Démontrer que $u_k\xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{||\cdot||_\infty}0$.

Q2. — Notons $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ définie de terme général $v_k=\left(\dfrac{k}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$. La suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est-elle bornée dans $(\ell^\infty,||\cdot||_\infty)$?

Q3. — La suite $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de terme général $w_k=(\sin(kn))_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle bornée ? Admet-elle une valeur d'adhérence ?

□

Énoncé de l'exercice 5

Munissons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie dans l'exercice précédent.

Q1. — Soit $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$. Pour tout $k\in\mathbf{N}$, U_k est une suite bornée notée $\left(u_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Supposons que $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers une suite $U=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\ell^\infty(\mathbf{R})$. Démontrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n^{(k)}\xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{}u_n$.

Q2. — Réciproquement, si pour tout $n\in\mathbf{N}$, la suite $\left(u_n^{(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel u_n, la suite $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle vers la suite (u_n) ?

□

Énoncé de l'exercice 6

Munissons $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par :

$$\forall f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}),\quad \big|\big|f\big|\big|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}\big|f(x)\big|.$$

L'espace des fonctions polynomiales est-il fermé dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}),||\cdot||_\infty\right)$?

□

Énoncé de l'exercice 7

Munissons $\mathbf{R}[X]$ de la norme $||\cdot||_1$ définie par :

$$\forall P\in\mathbf{R}[X],\quad ||P||_1=\sum_{k=0}^{+\infty}|[P]_k|.$$

Le sous-espace $F=\mathrm{Vect}\left(\left\{X^{2n}\ :\ n\in\mathbf{N}\right\}\right)$ est-il fermé dans $(\mathbf{R}[X],||\cdot||_1)$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction polynomiale non constante.

Q1. — Démontrer que l'application f est propre, i.e. que, pour tout compact K de $\mathbf{C}$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbf{C}$.

Q2. — Démontrer, que pour tout ouvert U, $f(U)$ est un ouvert.

Q3. — Démontrer que, pour tout fermé F, $f(F)$ est un fermé.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Notons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, posons :

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|.$$

Q1. — Notons $\mathscr{C}_0$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ constitué des suites convergeant vers 0. Déterminer la distance de la suite constante égale à 1 à $\mathscr{C}_0$.

Q2. — Notons $\mathscr{C}$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ constitué des suites convergentes. Déterminer la distance de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ à $\mathscr{C}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite d'éléments de E.

Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un fermé de E.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Q1. — Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Démontrer que F est fermé.

Q2. — Le résultat précédent demeure-t-il, si F n'est pas supposé de dimension finie ? On pourra s'intéresser au sous-espace F de $\ell^1(\mathbf{R})$ de constitué des suites nulles à partir d'un certain rang.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{T}'_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que l'adhérence de $\mathscr{D}'_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est $\mathscr{T}'_n(\mathbf{R})$. On pourra commencer par établir que, pour tout $A \in \mathscr{T}'_n(\mathbf{R})$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Soient $(E, ||\cdot||)$ et $(F, ||\cdot||)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une application injective.

Q1. — Démontrer que f est continue si et seulement si, pour tout compact K de E, $f(K)$ est un compact de f.

Q2. — Le résultat subsiste-t-il si f n'est pas supposée injective ?

□

Énoncé de l'exercice 14

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une application continue telle que, pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

Q1. — Démontrer que, pour tout fermé A de E, $f(A)$ est un fermé de F.

Q2. — En général, l'image d'un fermé par une application continue est-elle nécessairement fermée ?

□

Énoncé de l'exercice 15

Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, $C \subset E$ un ouvert convexe de E, contenant 0, borné et symétrique par rapport à 0 (pour tout $x \in C$, $-x \in C$). Pour tout $x \in E$, posons :

$$||x||_C = \inf\left\{t > 0 \;:\; \frac{x}{t} \in C\right\}.$$

On dit que $||\cdot||_C$ est la jauge associée à C.

Q1. — Démontrer que $||\cdot||_C$ est bien définie sur E.

Q2. — Démontrer que $||\cdot||_C$ est une norme sur E.

Q3. — Quelle est la boule unité ouverte pour la norme $||\cdot||_C$?

□

Énoncé de l'exercice 16

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \geqslant 1$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, posons :

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $q \geqslant 1$ l'unique réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Q1. — Démontrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^{+*})^2$:

$$x^{1/p}\, y^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}\, x + \frac{1}{q}\, y \qquad [\text{inégalité de Young}].$$

Notons $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$.

Q2. — Démontrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, $\left|\langle x, y \rangle\right| \leqslant ||x||_p \,\left|\left|y\right|\right|_q$.

Q3. — Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. En remarquant que :

$$\left(|x_k| + |y_k|\right)^p = |x_k| \,\left(|x_k| + |y_k|\right)^{p-1} + |y_k| \,\left(|x_k| + |y_k|\right)^{p-1}$$

montrer que $||\cdot||_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

Q4. — Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $||x||_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} ||x||_\infty$.

□

Énoncé de l'exercice 17

Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $p \geqslant 1$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$\left|\left|f\right|\right|_p = \left(\int_0^1 \left|f(x)\right|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Q1. — En s'inspirant de l'exercice 16, démontrer que $||\cdot||_p$ est une norme sur E.

Q2. — Démontrer que pour toute fonction $f \in E$, $\left|\left|f\right|\right|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \left|\left|f\right|\right|_\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Soit I un ouvert non vide de $\mathbf{R}$.

Démontrer qu'il existe une famille au plus dénombrable $(I_n)_{n\in I}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints telle que :

$$I = \bigcup_{n\in I} I_n.$$

On pourra considérer la relation d'équivalence sur I définie par $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $(x-y)\in I$ et étudier les classes d'équivalence pour cette relation.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Soient (E,N) un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et K_1, K_2 deux compacts non vides disjoints de E.

Démontrer que la distance :

$$\delta := \inf_{(x_1,x_2)\in K_1\times K_2} N(x_1-x_2)$$

entre les deux compacts K_1 et K_2 est atteint et strictement positive.

□

§ 2. CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

Notons $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. Pour tout $f\in E$, notons $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right|$ et $N_1(f) = \int_0^1 \left|f(x)\right|\,dx$.

Q1. — Démontrer succintement que N_∞ et N_1 sont des normes sur E.

Q2. — Démontrer qu'il existe un réel $k>0$ tel que pour tout $f\in E$, $N_1(f)\leqslant k\,N_\infty(f)$.

Q3. — Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

Q4. — Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Notons $E = \mathbf{R}[X]$. Pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, posons $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

Q1. — Démontrer succinctement que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.

Q2. — Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

Q3. — Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Soit $n\in\mathbf{N}$. Notons respectivement N_1' et N_∞' les restrictions de N_1 et N_∞ à $\mathbf{R}_n[X]$.

Q4. — Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Soient $(E,||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, $A\subset E$ une partie non vide et $x\in E$.

Q1. — Démontrer que : $x\in\overline{A}$ si et seulement s'il existe $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\in A^{\mathbf{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Q2. — Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

Q1. — Soit $f : E \longrightarrow F$, soit $a \in E$. Démontrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$, $f(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(a)$.

Q2. — Soit $A \subset E$ une partie dense dans E, soient f, g deux applications continues de E dans F telles que pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$. Démontrer que $f = g$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Notons $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, posons $N(f) = \displaystyle\int_0^1 e^x \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Q1. — Démontrer que N est une norme sur E. Comparer N et $||\cdot||_\infty$.

Q2. — Trouver la meilleure constante $\beta > 0$ telle que pour tout $f \in E$, $N(f) \leqslant \beta \,||f||_\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Soient $(E, ||\cdot||)$ et $(F, ||\cdot||)$ deux espaces vectoriels normés.

Q1. — Démontrer que si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(P1) f est continue sur E.

(P2) f est continue en 0.

(P3) $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E$, $||f(x)|| \leqslant k\,||x||$.

Q2. — Notons E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et munissons-le de la norme $||\cdot||_\infty$. On considère l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{array} \right.$$

Démontrer que φ est continue.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum |x_n|^2$ converge.

Q1. — Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

Q2. — Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$. Démontrer que la série $\sum \overline{x_n}\, y_n$ converge.

Pour toutes suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n.$$

Q3. — Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur ℓ^2.

On munit ℓ^2 de la norme associée au produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on fixe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$.

Q4. — Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \ell^2 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & x_{n_0} \end{array} \right.$$

est une application linéaire continue sur ℓ^2 et déterminer sa norme subordonnée $|||\varphi|||$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Munissons l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ *de la norme* $||\cdot||_\infty$ *et l'espace vectoriel* $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ *de la norme* $||\cdot||'_\infty$ *définie par :*

$$\forall f \in F, \quad ||f||'_\infty = ||f||_\infty + ||f'||_\infty .$$

Q1. — Vérifier que $||\cdot||'_\infty$ est une norme sur F.

Notons φ *l'application linéaire définie par :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Q2. — Démontrer que φ est continue, puis calculer $|||\varphi|||$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Munissons l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ *de la norme* $||\cdot||_\infty$. *Notons* φ *la forme linéaire sur* E *définie par :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = f(1) - f(0). \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que φ est continue calculer $|||\varphi|||$.

Q2. — L'application φ est-elle continue, si l'on remplace $||\cdot||_\infty$ par $||\cdot||_1$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Munissons l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ *de la norme* $||\cdot||_1$. *Notons* φ *la forme linéaire sur* E *définie par :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Démontrer que φ est continue et calculer $|||\varphi|||$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Soit $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. Notons* $|||\cdot|||$ *la norme subordonnée sur* $\mathscr{L}_c(E)$.

Soient $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{L}_c(E)$ *convergeant vers un endomorphisme continu* u *de* E *et* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* E *convergeant vers un vecteur* $x \in E$.

Démontrer que $u_k(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} u(x)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polynôme réel de degré* $n \geqslant 2$ *scindé à racines simples sur* $\mathbf{R}$.

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [-\alpha, \alpha]$, le polynôme $P(X) + \varepsilon X^{n+1}$ est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ *telle que* $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$:

$$\sigma_P \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$$

est un endomorphisme continu de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q2. — Démontrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. En déduire :

$$A^k \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Q3. — Démontrer qu'une suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire. En déduire que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Munissons $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ *de la norme définie par, pour tout* $A \in \mathcal{M}_p\mathbf{C})$ *:*

$$||A|| = \max_{(i,j) \in [\![1,p]\!]} \left|[A]_{i,j}\right|.$$

Q1. — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ telle que la suite $(||A^n||)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée. Démontrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$. *On suppose que la suite* $(B^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *converge vers une matrice* $C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

Q2. — Démontrer que $C^2 = C$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(C) \subset \{0, 1\}$.

Q3. — Démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de module inférieur ou égal à 1, et qu'une valeur propre de B de module 1 est égale à 1.

□

§ 3. ENSEA

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Notons $E = \mathbf{R}[X]$. *Pour tout* $P \in \mathbf{R}[X]$ *et tout* $n \in \mathbf{N}$, *posons* $\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)\, t^n \, \mathrm{d}t$. *Posons* $N(P) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\theta_n(P)|$.

Démontrer que $N(P)$ est bien définie et qu'elle induit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

□

§ 4. TPE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Soit $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé.*

Démontrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Soient $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé et* $C \subset E$ *une partie convexe.*

Démontrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Notons $\ell^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum |x_n|$ converge. Pour toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{R})$, notons :

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}.$$

Q1. — Démontrer que $||\cdot||_2$ est une norme sur $\ell^2(\mathbf{R})$.

Q2. — Posons F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbf{R})$. L'ensemble F est-il fermé ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Munissons $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_1$ et fixons $x_0 \in [0,1]$.

Q1. — Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array} \right.$$

n'est pas continue.

Q2. — Que dire de $\operatorname{Ker}(\varphi)$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Notons ℓ^∞ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. Nous le munissons de la norme $||\cdot||_\infty$ et considérons l'application :

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbf{N}}. \end{array} \right.$$

Démontrer que Δ est un endomorphisme continu de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ et calculer sa norme subordonnée $|||\Delta|||$.

□

§ 5. NAVALE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Démontrer que toute suite réelle admet une suite extraite monotone.

□

§ 6. CENTRALESUPÉLEC

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Soient K un compact d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$, et $f : K \longrightarrow K$ une application continue telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2, quad \big|\big| f(x) - f(y) \big|\big| \geqslant \big|\big| x - y \big|\big|.$$

Soit $(x,y) \in K^2$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites d'éléments de K définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_n = f^n(x) \quad et \quad y_n = f^n(y).$$

En d'autres termes, $x_0 = x$, $y_0 = y$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad et \quad y_{n+1} = f(y_n).$$

Q1. — Démontrer qu'il existe une application $\varphi :: N \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. Notons x' et y' leurs limites respectives.

Q2. — Démontrer que $\left|\left|x - x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\right|\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Q3. — Démontrer que $x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} x$ et $y_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} y$.

Q4. — Démontrer que :

$$\left|\left|x-y\right|\right| \leqslant \left|\left|f(x)-f(y)\right|\right| \leqslant \left|\left|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\right|\right|.$$

Q5. — En déduire que $\left|\left|f(x)-f(y)\right|\right| = \left|\left|x-y\right|\right|$.

Q6. — Démontrer que f est bijective.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Soient K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme continu tel que $f(K) \subset K$.

Démontrer que f possède un point fixe. Étant donné un $a \in K$, on pourra considérer la suite de terme général $x_n = \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} f^k(a)$.

Il s'agit du théorème du point fixe de Kakutani (1941).

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, $K \subset E$ un compact non vide, $f : K \longrightarrow K$ telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2, \quad x \neq y \Longrightarrow \left|\left|f(x)-f(y)\right|\right| < \left|\left|x-y\right|\right|.$$

Démontrer que f possède un unique point fixe $c \in K$ et que pour tout $x \in K$, la suite définie par $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Notons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace des suites réelles bornées et $\ell^1(\mathbf{R})$ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum |x_n|$ converge. Pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1(\mathbf{R})$, posons :

$$\langle a, x \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n.$$

Q1. — Justifier l'existence de $\langle a, x \rangle$.

Q2. — Soit $a \in \ell^\infty(\mathbf{R})$. Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbf{R})$.

Q3. — Soit $x \in \ell^1(\mathbf{R})$. Démontrer que l'application :

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & \langle a, x \rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(\mathbf{R})$.

Q4. — Soit f une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $a \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall x \in \ell^1(\mathbf{R}), \quad f(x) = \langle a, x \rangle.$$

Il s'agit d'une généralisation du théorème de représentation de Riesz, énoncé et démontré dans le cadre des espaces euclidiens.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Posons $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. *Pour toute fonction* $f \in E$, *notons :*

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x}.$$

Q1. — Démontrer que N est une norme sur E.

Q2. — Comparer N et $||\cdot||_\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 46

Q1. — Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

Q2. — Qu'en est-il de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$?

□

§ 7. MINES-PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 47

Soit K *une partie fermée de* $[0,1]^2$ *telle que, pour tout* $x \in [0,1]$, *l'ensemble*

$$F_x := \left\{y \in [0,1] \,:\, (x,y) \in K\right\}.$$

est un intervalle non vide.

Démontrer que K intersecte la droite d'équation $y = x$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 48

Soient n *un entier supérieur ou égal à 2 et* $\mathbf{K}$ *une partie de* $\mathbf{R}$ *qui est compacte et d'intérieur non vide. Nous munissons* $\mathbf{R}_n[X]$ *des normes* $||\cdot||_\infty$ *et* $||\cdot||_K$ *définies pour tout polynôme* $P \in \mathbf{R}_n[x]$ *par :*

$$||P||_K = \sup_{x\in K}|P(x)| \qquad \textit{et} \qquad ||P||_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |[P]_k|.$$

Soit $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite de polynômes de* $\mathbf{R}_n[X]$ *tel qu'il existe* $P \in \mathbf{R}_n[X]$ *vérifiant, pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *:*

$$P_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbf{R}} P(x).$$

Démontrer que la suite $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers P pour la norme $||\cdot||_K$ et pour la norme $||\cdot||_\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 49

Soit $||\cdot||$ *la norme euclidienne sur* $\mathbf{R}^n$ *et notons* $|||\cdot|||$ *sa norme subordonnée sur* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q1. — Démontrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

Q2. — On note $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,:\, \det(M) = 1\}$. L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est-il compact ?

□

§ 8. X

Énoncé de l'exercice 50

Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbf{U}, \times)$ dans lui-même.

□

Énoncé de l'exercice 51

Que dire d'une partie convexe et dense d'un espace vectoriel normé ?

□

Énoncé de l'exercice 52

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbf{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

□

Énoncé de l'exercice 53

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Déterminer les matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe similitude, i.e. l'ensemble :

$$\left\{P^{-1}AP \,:\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})\right\}$$

est fermée.

□

Énoncé de l'exercice 54

Soient un entier $n \geqslant 2$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Démontrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de matrices semblables à A convergeant vers 0.

□

§ 9. ÉNS

Énoncé de l'exercice 55

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée.

□