Révisions sur les suites numériques

TD 5

par David Blottière, le 15 octobre 2023 à 15h37

Sommaire

§ 1. Miscellanées

Énoncé de l'exercice 1

Q1. — Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Q2. — Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Q3. — Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_1 = -1$, $u_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

□

Énoncé de l'exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{Z}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire.

□

Énoncé de l'exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2.

Q1. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle?

Q2. — Supposons que $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

□

Énoncé de l'exercice 4

Soient $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

□

Énoncé de l'exercice 5

Soient deux nombres réels $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les deux suites définies par $u_0 := a$, $v_0 := b$ et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\,.$$

Q1. — Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $y \geqslant 0$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

Q2. — Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$.

Q3. — Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une limite commune. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

Q4. — Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$.

Q5. — Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda\, M(a,b)$.

□

§ 2. CCINP

Énoncé de l'exercice 6

Q1. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

Q2. — Déterminer le signe de $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

□

Énoncé de l'exercice 7

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

□

Énoncé de l'exercice 8

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $u_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n := u_n + \dfrac{1}{n!}$.

Q1. — Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Q2. — On admet que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$. Démontrer que e est irrationnel.

□

Énoncé de l'exercice 9

Q1. — Démontrer que pour, tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant e^x - x - 1 \leqslant \dfrac{e}{2} \cdot x^2$.

Q2. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in N^*}$.

Indication : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$, *où γ est la constante d'Euler.*

□

Énoncé de l'exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et déterminer un équivalent de u_n.

□

Énoncé de l'exercice 11

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$.

Indication : la série de terme général $\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}$ converge.

□

Énoncé de l'exercice 12

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n, puis étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

Énoncé de l'exercice 13

Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\pi}$.

□

Énoncé de l'exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $u_0, u_1, u_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+3} = (u_n \cdot u_{n+1} \cdot u_{n+2})^{1/3}$.

Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et déterminer son éventuelle limite en fonction de u_0, u_1, u_2.

□

Énoncé de l'exercice 15

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$.

□

Énoncé de l'exercice 16

Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$.

Q1. — Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q2. — Déterminer un équivalent de u_n.

□

Énoncé de l'exercice 17

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s_n \leqslant 9 \cdot (\log(n)+1)$ où log désigne le logarithme décimal.

Q2. — Démontrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

□

Énoncé de l'exercice 18

Considérons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $0 \leqslant x_0,\ y_0 \leqslant 7$ et les relations de récurrence

$$x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \sqrt{7 - x_n}$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

Énoncé de l'exercice 19

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation :

$$\tan\left(\frac{x\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2nx}$$

admet une unique solution x_n dans $]0,1[$.

Q2. — Démontrer que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et déterminer un équivalent de x_n.

□

Énoncé de l'exercice 20

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

□

Énoncé de l'exercice 21

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, l'équation :

$$1 + \ln(x+n) = x$$

admet une unique solution $u_n \in \mathbf{R}_{>0}$.

Q2. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}}$ est croissante.

Q3. — Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant n$.

Q4. — Déterminer un équivalent de u_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ *tels que* $a < b$ *et* $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *une fonction* 1*-lipschitzienne. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite réelle définie par la donnée de* $x_0 \in [a,b]$ *et la relation de récurrence* $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ *valable pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.

□

§ 3. CENTRALE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation :

$$e^{-x} \cdot \cos(x) = \frac{x}{n}$$

admet une solution maximale x_n sur $\mathbf{R}$.

Q2. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et diverge vers $+\infty$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Q1. — Soit $a > 0$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $x_n > n$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_n - k} = a.$$

Q2. — Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et déterminer un équivalent de x_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe* $a > 1$ *vérifiant :*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a.$$

Q1. — Démontrer que $a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

Soient I *un intervalle de* $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow I$ *une fonction dérivable et* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* I *telle que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. *On suppose que* $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell \in I$ *et que* $|f'(\ell)| > 1$.

Q2. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire.

Soit $a \in \mathbf{R}$. *Posons, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2\cos(2^n a)$.

Q3. — Déterminer une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Q4. — Déterminer les points fixes de f.

Q5. — Déterminer les réels a tels que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26 **INDICATIONS**

Soient $a \in]-1,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

Démontrer que :

$$u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - a\cdot u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\,.$$

□

§ 4. MINES-PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation :

$$x = \operatorname{cotan}(x)$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$.

Q2. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = n\pi + \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Q3. — Déterminer un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique à deux termes de x_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Q1. — Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation :

$$x^n - n\cdot x + 1 = 0$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0,1[$.

Q2. — Démontrer que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite.

Q3. — Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, posons :

$$f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k.$$

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive ou nulle, que l'on notera x_n.

Q2. — Étudier la convergence et déterminer l'éventuelle limite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Q1. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1$$

admet une unique solution positive notée x_n.

Q2. — Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Soient $(h,k) \in \mathbf{N}^2$ *tels que* $1 \leqslant k < h$.

Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{i=kn+1}^{hn} \ln\left(1 + \frac{i}{n^2}\right).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite réelle telle que* $u_0 > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite réelle, convergeant vers un réel* ℓ, *et notons* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad y_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k.$$

Étudier la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et déterminer son éventuelle limite.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Q1. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons : $u_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{1}{2^k}\right)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $u_n \cdot \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Q2. — Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1)\cos(1)$.

Posons $z_0 = re^i$, *où* $r > 0$. *Considérons la suite* $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de nombres complexes vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

Q3. — Étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$u_{n+1} - u_{n-1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Démontrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est soit infini, soit de cardinal inférieur ou égal à 2.

□

§ 5. X

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Soit $\lambda \in]0,1]$.

Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1]$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = 1 - \lambda \cdot x_n^2$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) \underset{x\longrightarrow0^+}{=} x - a\cdot x^{\alpha} + \mathrm{o}\left(x^{\alpha}\right).$$

où $a > 0$ et $\alpha > 1$.

Q1. — Démontrer que pour u_0 assez petit, une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers 0.

Q2. — Déterminer un équivalent de u_n. Indication : on pourra examiner $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ pour un certain β.

Q3. — Traiter l'exemple de la fonction sinus.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \textit{et} \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Q1. — On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est à termes réels positifs. Démontrer que :

$$\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge} \iff \text{la suite } (\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge}$$

Q2. — On suppose que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Démontrer que si $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

□

INDICATIONS POUR L'EXERCICE 26 ÉNONCÉ

$\Longleftarrow$ Supposons que :

$$(\star) \quad u_{n+1} - a \cdot u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Grâce à l'hypothèse $(\star)$, on établit qu'il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall\, n \geqslant N, \quad |u_{n+1}| \leqslant \varepsilon + |a| \cdot |u_n| \qquad \big[\text{inégalité qui évoque les suites arithmético-géométriques}\big]$$

puis on démontre que :

$$\forall\, p \in \mathbf{N}^*, \quad \left|u_{N+p}\right| \leqslant \varepsilon \cdot \left(\sum_{k=0}^{p-1} |a|^k \right) + |a|^p \cdot |u_N|\,.$$

Il reste à rédiger une démonstration rigoureuse, dans laquelle apparaîtra le résultat suivant :

$$|a|^n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \qquad [\text{car } |a| < 1]\,.$$