RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

TD 4

par David Blottière, le 15 octobre 2023 à 08h14

SOMMAIRE

NOTATION. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps.

§ 1. MISCELLANÉES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les deux questions sont indépendantes.

Q1. — Démontrer que la famille $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^n\right)$ est liée . En déduire l'existence d'un polynôme non nul annulateur de f.

Q2. — Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, soit P un polynôme annulateur de f. Démontrer que $P(\lambda) = 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbf{R}$? Si oui, les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? La diagonaliser lorsque c'est le cas.

□

Énoncé de l'exercice 4

Démontrer que les matrices suivantes sont diagonalisables dans $M_3(\mathbf{C})$ et les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Énoncé de l'exercice 5

Q1. — Démontrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$, mais pas dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Q2. — Démontrer qu'elle est semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Énoncé de l'exercice 6

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

Q1. — Démontrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u^2 = \lambda \cdot u$.

Q2. — Démontrer que λ est une valeur propre de u.

□

Énoncé de l'exercice 7

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Posons :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA. \end{array} \right.$$

Déterminer les éléments propres de φ.

□

Énoncé de l'exercice 8

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $J^2 = -I_n$.

Q1. — Démontrer que J est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(J) = \{i, -i\}$.

Q2. — Démontrer que les multiplicités de i et $-i$ sont égales.

Q3. — En déduire que n est pair. On pose $n = 2p$ dans la suite.

Q4. — Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} i \cdot I_p & 0 \\ 0 & -i \cdot I_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ à la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Q5. — En déduire que J est semblable à J_n dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, puis dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalisable.

Q1. — Démontrer que l'application :

$$f_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

Q2. — Démontrer que l'application :

$$g_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbf{K}[X]$. Notons μ le polynôme minimal de u.

Démontrer que :

$$P(u) \in GL(E) \iff P \wedge \mu = 1.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^2$. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $AB = P(A)$, $P(0) \neq 0$.

Démontrer que A est inversible et que A et B commutent.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et v soit nilpotent. Cet exercice a pour but de montrer que $\mathrm{Det}(u + v) = \mathrm{Det}(u)$.

Q1. — Établir le résultat voulu lorsque $n = 1$.

Q2. — Donner l'allure de la matrice de u, v et $u + v$ dans une base adaptée à $\mathrm{Im}(v)$.

Q3. — Conclure par récurrence sur la dimension de l'espace.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Cet exercice a pour but de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E stable par u de dimension 1 ou 2.

Q1. — Que dire si u possède une valeur propre ? On supposera désormais que ce n'est pas le cas.

Q2. — Notons $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ de E. Démontrer qu'il existe un complexe λ et un vecteur colonne à coefficients complexes Z tels que $MZ = \lambda \cdot Z$.

Q3. — Écrivons $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ et $Z = X + iY$, où X et Y sont des vecteurs colonnes à coefficients réels. Calculer MX et MY en fonction de α, β, X et Y.

Q4. — Conclure.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Dans cet exercice, $\mathbf{K}$ *désigne* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

Q1. — Soit T une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{K}$, soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe des réels $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in]0, \varepsilon[$ tels que la matrice :

$$T + \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

soit diagonalisable.

Q2. — Étant donnée une matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, posons $||M|| = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right|$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ trigonalisable, il existe une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable telle que $||M - N|| \leqslant \varepsilon$.

Q3. — Démontrer que pour tout matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $||M - N|| \leqslant \varepsilon$.

Q4. — Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Supposons donnée une suite $(N_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de matrices diagonalisables telle que $||M - N_n|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que M est trigonalisable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. *Posons :*

$$||A|| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

Démontrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A) \subset [-||A||, ||A||]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Q1. — Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $\mathrm{Det}(A - \lambda I_n) \neq 0$.

Q2. — Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, posons $||M|| = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right|$. Démontrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$, il existe une suite (M_n) de matrices inversibles telle que $||M - M_n|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Soit E *un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel de dimension finie.*

Démontrer que tout endomorphisme de E a au-moins une valeur propre. Est-ce vrai si E n'est pas de dimension finie? *Indication : On pourra considérer l'endomorphisme* φ *de* $\mathbf{C}[X]$ *défini par, pour tout* $P \in \mathbf{C}[X]$, $\varphi(P) = (X-1)P(X)$.

□

Énoncé de l'exercice 18

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Notons $\mu_{\mathbb{Q}}$ le polynôme minimal de M en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $\mu_{\mathbf{R}}$ le polynôme minimal de M en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que $\mu_{\mathbb{Q}} = \mu_{\mathbf{R}}$.

□

Énoncé de l'exercice 19

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal μ. Pour tout $x \in E$, notons :

- *P_x le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_x(u)(x) = 0$.*
- *$E_x = \{P(f)(x) \, : \, P \in \mathbf{K}[X]\}$.*

Soit $x \in E$.

Q1. — Démontrer que P_x existe et est unique, et que pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$:

$$P(f)(x) = 0 \Longrightarrow P_x | P.$$

Q2. — Démontrer que E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\deg(() \, P_x)$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

Q3. — Si $E_x \cap E_y = \{0\}$, montrer que $P_{x+y} = \mathrm{ppcm}(P_x, P_y)$. Généraliser à p vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E.

Q4. — Si $P_x \wedge P_y = 1$, montrer que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$. Généraliser à p vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E.

Q5. — Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un facteur irréductible de μ, notons α sa multiplicité dans la décomposition de μ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}\left(P^\alpha(f)\right)$ tel que $P_x = P^\alpha$.

Q6. — Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \mu$.

□

Énoncé de l'exercice 20

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Q1. — Soient u et v des endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$$

sont diagonales.

Q2. — Soient un entier $p \geqslant 2$ et $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E qui commutent deux-à-deux. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)\,,\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)\,,\, \ldots\,,\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_p)$$

sont diagonales.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Q1. — Soient u et v des endomorphismes trigonalisables de E qui commutent. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$$

sont triangulaires supérieures.

Q2. — Soient un entier $p \geqslant 2$ et $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux-à-deux. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)\,,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)\,,\ \dots\,,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_p)$$

sont triangulaires supérieures.

□

§ 2. CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Q1. — Démontrer que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2,\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Q2. — Démontrer que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2,\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Q3. — Démontrer que pour tout couple $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$:

$$P(u) = 0 \implies (PQ)(u) = 0.$$

Q4. — Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, et en déduire que le polynôme $R(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Q1. — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Rappeler la définition d'une valeur propre et démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(u) \iff \mathrm{Det}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = 0.$$

En déduire que u possède au plus n valeurs propres distinctes.

Q2. — Trouver un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ayant 0 et 1 comme valeurs propres.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, *où* $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Q1. — M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?

Q2. — M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, *où* $a \in \mathbf{R}$.

Q1. — Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?

Q2. — La matrice A est-elle diagonalisable ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

Q1. — Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. — Soit $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$. Posons $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déduire de la question 1 les éléments propres de B.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Soit E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*, soit* $f \in \mathcal{L}(E)$*, soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*. On suppose que* $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$*, où* v *est un vecteur donné de* E*.*

L'endomorphisme f est-il diagonalisable (discuter en fonction du vecteur v) ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Q1. — Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Q2. — Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, D_n désigne le déterminant de A.

Q1. — Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$, puis déterminer D_n en fonction de n.

Q2. — Jusfifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. — Démontrer que $\lambda = 2$ est valeur propre de A et que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Q2. — Vérifier que A possède deux autres valeurs propres -2 et 4 avec comme vecteurs propres respectivement associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q3. — On considère les suites $(a_n)_{n\in n\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par leurs premiers termes a_0, b_0, c_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}$$

On suppose que $a_0 = 2$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 0$. Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. — Déterminer les valeurs propres de A, puis une base de vecteurs propres associés.

Q2. — Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base de vecteurs, puis son inverse P^{-1}.

Q3. — On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y + z \\ z' = 3z \end{cases}$.

Résoudre ce système en utilisant la question 1.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. — Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

Q2. — On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Q3. — En déduire une méthode de résolution su système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *(avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*). Posons :*

$$\Phi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

Q1. — Déterminer les valeurs propres de Φ_A en fonction des valeurs propres de A.

Q2. — Déterminer les sous-espaces propres de Φ_A en fonction des sous-espaces propres de A.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. *Notons* U *la matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *dont tous les coefficients valent* 1.

Q1. — Quel est le rang de U ? Démontrer que 0 est valeur propre de multiplicité au-moins $n-1$.

Q2. — Démontrer que n est valeur propre de U, et trouver le sous-espace propre correspondant. Quel est le polynôme caractéristique de U ?

Q3. — Diagonaliser U (on pourra commencer par trouver une base du noyau de U).

Q4. — Retrouver le polynôme caractéristique de U par un calcul direct de déterminant.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. *Posons* $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C})$.

Q1. — Supposons A diagonalisable. Monter que B est diagonalisable.

Dans la suite, on ne supppose plus A diagonalisable.

Q2. — Démontrer que $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$. En déduire la dimension de $E_0(B)$ en fonction de celle de $E_0(A)$.

Q3. — Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}_{\mathbf{C}}(B) \setminus \{0\}$, soit $Y \in \mathscr{M}_{2n,1}$ tel que $BY = \lambda \cdot Y$.

Q4. — Démontrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $Y = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$.

Q5. — Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A)$, et déterminer la dimension de $E_\lambda(A)$ en fonction de celle de $E_\lambda(B)$.

Q6. — En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les droites de $\mathbf{R}^3$ stables par u.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

On rappelle que $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, notons u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à A.

Q1. — Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^3$ stables par u.

Q2. — Déterminer le commutant de A.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Q1. — Démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Q2. — Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u.

Q1. — Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

Q2. — Démontrer que la matrice de u dans cette base ne dépend pas de x.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Soit $n \geqslant 2$, posons :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & n^2 \cdot X\,P - (X^2+X)\,P' - X^3\,P''. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q2. — L'endomorphisme g est-il injectif ? diagonalisable ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, *posons* $A(z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q1. — Démontrer que $A(z)$ est diagonalisable, sauf pour une valeur particulière de z que l'on précisera.

Q2. — Soit $\theta \in \mathbf{R} \backslash 2\pi\mathbf{Z}$. Démontrer qu'il existe un unique complexe z tel que $e^{i\theta}$ soit valeur propre de $A(z)$. Déterminer cette valeur $z(\theta)$ et déterminer son module.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

Démontrer qu'un matrice de de taille supérieure ou égale à 2 et de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Soient $(A, B)^2 \in M_n(\mathbf{C})^2$ *telles que* $B^2 = A$.

Q1. — Si A est diagonalisable, la matrice B est-elle diagonalisable ?

Q2. — Si A est diagonalisable et inversible, la matrice B est-elle diagonalisable ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

Étudier la diagonalisabilité de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbf{C})$ *telle que* $m_{i,i-1} = 1$ *pour tout* $i \in [\![2, n]\!]$, $m_{1,n} = 1$, *les autres coefficients étant nuls.*

Q1. — Démontrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines n-ièmes de l'unité.

Q2. — Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $A = a_0 I_n + a_1 M + \ldots + a_{n-1} M^{n-1}$. Démontrer que :

$$\mathrm{Det}(A) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}\right).$$

□

Énoncé de l'exercice 46

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie de E et

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & \frac{1}{2}(u \circ v - v \circ u). \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

Q2. — Déterminer un polynôme annulateur de Φ.

Q3. — L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

□

Énoncé de l'exercice 47

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Q1. — Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Q2. — Soient $(u_1, \dots, u_p) \in \mathscr{L}(E)^p$ des endomorphismes commutant deux-à-deux. Démontrer que $u_1, \dots, u_p$ ont un vecteur propre commun.

□

Énoncé de l'exercice 48

Trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

□

Énoncé de l'exercice 49

Déterminer toutes les matrices commutant avec $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

□

Énoncé de l'exercice 50

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$ *et* $\mathrm{Tr}(A) = 1$.

Démontrer que $A^2 = A$.

□

Énoncé de l'exercice 51

Soit $A \in \mathrm{GL}_5(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 2$ *et* $A^3 + A^2 - 2A = 0$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 52

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *tel que* $f^4 = f^2$ *et* $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Spec}(f)$.

Démontrer que f est diagonalisable.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 53

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *telle que* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \cdot M - \mathrm{Tr}(M) \cdot A. \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 54 INDICATIONS

Soit E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$). *Soient* $(u, v) \in \mathscr{L}(E)$ *tels que* $u \circ v - v \circ u = u$.

Q1. — Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

Posons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ w & \longmapsto & w \circ v - v \circ w. \end{array} \right.$$

Q2. — Démontrer que φ est linéaire. Combien de valeurs propres a-t-elle au maximum ?

Q3. — Démontrer que u est nilpotent.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 55

Soit E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$). *Soient* $(u, v) \in \mathscr{L}(E)$ *tels que* $u \circ v - v \circ u = id$.

Q1. — Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^{k-1}$.

Q2. — En déduire que u est nilpotent.

Q3. — Conclure.

□

§ 3. TPE

Énoncé de l'exercice 56

Discuter de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité en fonction du réel a de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

□

Énoncé de l'exercice 57

Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer les valeurs propres de la matrice de format (n, n), dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des dernières lignes et colonnes qui valent 1.

□

Énoncé de l'exercice 58

Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^3 + X)\, P' - (3X^2 - 1)\, P \end{array} \right.$$

Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$, et déterminer ses éléments propres.

□

§ 4. ENSAM

Énoncé de l'exercice 59

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$. Notons A sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Q1. — Démontrer qu'une droite engendrée par un vecteur u non nul est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

Q2. — Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Démontrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si le vecteur $(a, b, c)^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.

Q3. — Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) f admet une unique droite stable.

(b) f admet un unique plan stable.

(c) Le polynôme caractéristique de f admet une unique racine réelle de multiplicité 1 ou 3 et l'espace propre correspondant est une droite.

Q4. — Déterminer les sous-espaces stables de f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

§ 5. CentraleSupélec

Énoncé de l'exercice 60

Q1. — Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Q2. — Soit $P = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$ un polynôme de degré n, unitaire, de racines $\lambda_k \in \mathbf{C}$. Supposons que $P \in \mathbf{Z}[X]$. Démontrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=1}^{n}\left(X-\lambda_k^p\right)$ est à coefficients entiers.

□

Énoncé de l'exercice 61

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^2$. Notons P_A et P_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

Q1. — Supposons que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) = \emptyset$. Démontrer que P_A et P_B sont premiers entre eux, puis que $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont inversibles.

Q2. — On suppose toujours que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) = \emptyset$. Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AX = XB$. Démontrer que $X = 0$.

Q3. — On suppose maintenant que A et B ont une valeur propre en commun λ. Démontrer qu'il existe une matrice non nulle $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AX = XB$.
Indication : On pourra construire X à l'aide d'un vecteur propre de A et d'un vecteur propre de $B^\top$.

Q4. — Démontrer que l'équation $AX - XB = Y$ d'inconnue X admet une unique solution pour tout $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) = \emptyset$.

□

Énoncé de l'exercice 62

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A et μ_A son polynôme minimal.

Q1. — Caractériser en fonction de χ_A et de μ_A les caractères diagonalisable et trigonalisable de A.

On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Q2. — Démontrer que si χ_A est scindé, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, χ_{A^k} est scindé.

Q3. — Démontrer que si χ_{A^2} est scindé à racines réelles positives, alors χ_A est scindé.

Q4. — Donner un exemple de matrice A pour laquelle χ_{A^2} est scindé mais pas χ_A.

On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Q5. — On suppose que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{C})$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p X = X$. Démontrer que A est diagonalisable.

Q6. — On suppose A non diagonalisable. Démontrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $(A-\lambda I_n)^2 X = 0$ et $(A-\lambda I_n) \neq 0$.

Q7. — On suppose A inversible et que pour tout $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, la suite $\left(A^k X\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. Démontrer que A est diagonalisable.

□

Énoncé de l'exercice 63

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$.

On suppose A diagonalisable et inversible.

Q1. — Calculer B^2.

Q2. — Démontrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(B^2) = 0$.

Q3. — Démontrer que B est diagonalisable et inversible.

On suppose B diagonalisable et inversible.

Q4. — Exprimer B^p en fonction des puissances de A.

Q5. — Démontrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$, puis deux polynômes Q et R tels que $P(X) = Q\left(X^2\right) + X\,R\left(X^2\right)$.

Q6. — Calculer $Q(A)$ et $R(A)$.

Q7. — Démontrer que le pgcd de q et de R est scindé à racines simples.

Q8. — Démontrer que A est diagonalisable et inversible.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q9. — La matrice B est-elle diagonalisable ?

□

Énoncé de l'exercice 64

On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et on pose

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & M A^\top - AM. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q2. — Démontrer que si X et Y sont des valeurs propres de A, alors $X Y^\top$ est une valeur propre de f.

Soit λ une valeur propre de f, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ un vecteur propre associé.

Q3. — Démontrer que pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(A)\,B = B\,P\left(A^\top - \lambda \cdot I_n\right)$.

Q4. — On se donne $Q \in \mathbf{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, λ et les racines de Q pour que $Q\left(A^\top - \lambda \cdot I_n\right)$ soit inversible.

Q5. — Démontrer que λ est différence de deux valeurs propres de A.

Q6. — Exprimer le spectre de f en fonction de celui de A.

Q7. — Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de A pour que f soit un automorphisme.

Q8. — Démontrer que si A est diagonalisable, alors f est diagonalisable.

Q9. — Démontrer que f est nilpotente si et seulement si A est nilpotente. Que dire de leurs indices de nilpotence?

□

§ 6. Mines Ponts

Énoncé de l'exercice 65

Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ semblables à leur carrés.

□

Énoncé de l'exercice 66

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que A est nilpotente si et seulement si :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \ldots = \mathrm{Tr}\left(A^n\right) = 0.$$

□

Énoncé de l'exercice 67

Posons $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *avec* $a_{i,j} = j$ *pour* $i \neq j$ *et* $a_{i,i} = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

Calculer $\chi_A(-k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

□

Énoncé de l'exercice 68

Soit F *un sous-espace vectoriel de* $M_n(\mathbf{R})$ *ne contenant que des matrices diagonalisables.*

Q1. — Démontrer que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Q2. — Démontrer que cette borne est optimale.

□

§ 7. X

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 69

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. *Pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$, *posons* $R_i := \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

Q1. — On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que A est inversible.

Q2. — Démontrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbf{C} \;:\; |z - a_{i,i}| \leqslant R_i\}$.

Q3. — On suppose à nouveau que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que :

$$|\mathrm{Det}(A)| \geqslant \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i,i}| - R_i\right).$$

Q4. — On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > R_i$. Démontrer que :

$$\mathrm{Det}(A) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i,i}| - R_i\right).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 70

Q1. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$. Démontrer que A est nilpotente.

Soit G un sous-groupe de de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, *soit* $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in G^m$ *une base de* $\mathrm{Vect}(G)$. *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbf{C}^m \\ A & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1\leqslant i\leqslant m}\,. \end{array} \right.$$

Q2. — Soient $(A,B) \in G^2$ telles que $f(A) = f(B)$. Démontrer que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.

Q3. — On suppose que toutes les matrices de G sont diagonalisables. Démontrer que f est injective.

Q4. — Supposons que :

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall M \in G, \quad M^N = I_n \qquad [\text{le groupe } G \text{ est d'exposant fini}]\,.$$

Démontrer que le groupe G est fini. *Ce résultat est un théorème dû à Burnside.*

□

§ 8. ÉNS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 71

Notons S l'ensemble des matrices $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} \geqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

Les matrices de S sont appelées matrices stochastiques. Soit $M \in S$, soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre complexe de A, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ un vecteur propre associé.

Q1. — Démontrer que $|\lambda| \leqslant 1$. Démontrer que 1 est valeur propre de M.

Q2. — Supposons λ de module 1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \left|x_j\right|$. Démontrer qu'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j = \lambda x_i$.

Q3. — En déduire que λ est une racine m-ième de l'unité, avec $m \leqslant n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 72

Q1. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$. Supposons qu'il existe un polynôme complexe P non nul scindé à racines simples de module strictement inférieur à 1 tel que $P(A) = 0$. Démontrer que $A = 0$.

Soit G un sous-groupe fini de :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) := \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ : \ M^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})\right\}.$$

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier.

Q2. — Démontrer que l'application qui à toute matrice $M \in G$ associe la matrice $\overline{M} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_p\right)$ dont les coefficients sont obtenus en prenant la réduction modulo p des coefficients de M est injective.

Q3. — En déduire qu'il existe $M_n \in \mathbf{N}$ telle que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ soit de cardinal majoré par M_n.

□

INDICATIONS POUR L'EXERCICE 54 ÉNONCÉ

Q1. — Raisonner par récurrence sur l'entier naturel k. Appliquer l'hypothèse :

$$u \circ v - v \circ u = u$$

dans la rédaction de l'hérédité.

Q2. — Dans la rédaction de l'hérédité, on justifiera l'identité :

$$v \circ (\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2) = \lambda_1 \cdot v \circ w_1 + \lambda_2 \cdot v \circ w_2$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et $(w_1, w_2) \in \mathscr{L}(E)^2$. D'après le cours, le nombre de valeurs propres de φ, endomorphisme du $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{L}(E)$, est majoré par ...

Q3. — Raisonner par l'absurde en supposant que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $u^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donner une interprétation du résultat de la question 1 en termes d'éléments propres de φ, puis appliquer le résultat de la question 2.