RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

TD 3

par David Blottière, le 27 septembre 2023 à 06h51

SOMMAIRE

§ 1. ESPACES VECTORIELS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soit $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel. Soient* $\lambda \in \mathbf{K}$ *et* $x \in E$.

Démontrer :

$$\lambda \cdot x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad (\lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } x = 0_E).$$

□

§ 2. SOUS-ESPACES VECTORIELS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Q1. — L'ensemble $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x+y+z=1\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

Q2. — L'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, y=x^2\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Démontrer que les ensembles :

$$\mathscr{S}_c = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;:\; (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge}\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{S}_0 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;:\; u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Démontrer que $\{P \in \mathbf{K}[X] \;:\; P(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

$$F_1 := \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;:\; u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1\right\} \qquad F_2 := \{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;:\; (u_n) \text{ est bornée}\} \qquad F_3 := \{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;:\; \left(u_n^2\right) \text{ converge}\}$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

$$F_1 := \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \;:\; f \text{ est } 2\pi-\text{périodique}\} \qquad F_2 := \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \;:\; f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 1\right\} \qquad F_3 := \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \;:\; f \text{ est non bornée}\}$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel non trivial de E.

Démontrer que $F^c \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

□

§ 3. OPÉRATIONS SUR LES SOUS-ESPACES VECTORIELS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ?

Si F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tels que $F+G=F+H$, alors $G=H$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Q1. — Justifier :

$$F \subset G \iff F+G=G.$$

Q2. — Démontrer :

$$F \cap G = F+G \Longrightarrow F=G.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F, G, H deux sous-espaces vectoriels de E.

Démontrer que :

$$(F\cap G)+(F\cap H) \subset F\cap(G+H).$$

A-t-on nécessairement égalité ?

□

§ 4. FAMILLES REMARQUABLES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ sont elles libres ? génératrices ?

(A) $\mathscr{E} := (e_1, e_2, e_3)$, où $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,1,1)$, $e_3 = (1,0,0)$

(B) $\mathscr{F} := (f_1, f_2, f_3)$, où $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (1,0,1)$, $f_3 = (2,0,1)$

(C) $\mathscr{G} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$, où $g_1 = (-1,0,1)$, $g_2 = (1,-1,1)$, $g_3 = (1,0,0)$, $g_4 = (2,3,4)$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Posons :

$$f_1 := e_1 \quad , \quad f_2 := e_1 + e_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad f_n := e_1 + \dots + e_n.$$

La famille $\left(f_1, \dots, f_n\right)$ est-elle libre ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Posons :

$$f_1 := e_1 + e_2 \quad , \quad f_2 := e_2 + e_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad f_{n-1} := e_{n-1} + e_n \quad , \quad f_n := e_n + e_1.$$

À quelle condition la famille $\left(f_1, \dots, f_n\right)$ est-elle libre ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E.

Q1. — Démontrer que si f est injective, alors la famille $\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$ est libre.

Q2. — La réciproque est-elle vraie ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 16

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Supposons qu'il existe p vecteurs non nuls $x_1, \dots, x_p$ et p scalaires deux-à-deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \qquad f(x_i) = \lambda_i \cdot x_i.$$

Démontrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 17

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne :

$$E_{i,j} = \left(\delta_{k,i} \cdot \delta_{\ell,j}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}.$$

Démontrer que $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 18

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Q1. — Démontrer que $\mathscr{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Q2. — Soit $D \in \mathscr{D}_n$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont deux-à-deux distincts. Démontrer que la famille :

$$\left(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1}\right)$$

est une base de $\mathscr{D}_n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 19

Posons $P_0 := 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n := \prod_{i=0}^{n-1} (X - i)$.

Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 20

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré n et soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des complexes distincts. On définit, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P_k := P(X + x_k).$$

Prouver que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 21

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux-à-deux distincts. Posons, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$e_k \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{a_k}. \end{array} \right.$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est-elle libre ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 22

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons e_n et c_n les fonctions définies par

$$e_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{inx} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad c_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(nx). \end{array} \right.$$

Démontrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est libre dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, puis que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 23

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons f_k la fonction définie par :

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^k(x). \end{array} \right.$$

La famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$? Qu'en déduire pour le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 24

Notons $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.

Démontrer que la famille $\left(\ln(p_n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, notons f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x-a|. \end{array} \right.$$

Démontrer que la famille $\left(f_a\right)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Q1. — On suppose α transcendant, i.e. que pour tout polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P \neq 0 \Longrightarrow P(\alpha) \neq 0$. Démontrer que la famille $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

Q2. — On ne suppose plus α transcendant, mais on suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha^k \in \mathbf{Q}$. Posons

$$n := \min\left\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ \alpha^k \in \mathbf{Q}\right\}.$$

Démontrer que la famille $\left(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\right)$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

□

§ 5. SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Déterminer une base et un supplémentaire dans E des sous-espaces vectoriels suivants.

(a) $F_1 := \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t=0\}$, $E = \mathbf{R}^4$

(b) $F_2 := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \left\{ \begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \right. \right\}$, $E = \mathbf{R}^4$

(c) $F_3 := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \left\{ \begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x+t=0 \end{array} \right. \right\}$, $E = \mathbf{R}^4$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Soient $E_1 = Vect\{v_1, v_2\}$ et $E_2 = Vect\{w_1, w_2\}$ avec $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (0,2,1,0)$, $w_1 = (0,6,-1,4)$ et $w_2 = (3,3,1,5)$.

Q1. — Caractériser $E_1 \cap E_2$.

Q2. — Donner une base de $E_1 + E_2$.

Q3. — Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Notons P (respectivement I) l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ paires (respectivement impaires).

Démontrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = P \oplus I$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Soient $A \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non constant et

$$F = A\mathbf{K}[X] := \{AP \,:\, P \in K[X]\}.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{K}[X]$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels deux-à-deux distincts.

Q1. — Démontrer que
$$F := \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \,:\, f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Q2. — Donner un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 32

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ tous distincts de E.

Q1. — Démontrer que $E \neq F_1 \cup \ldots \cup F_p$.

Q2. — Supposons les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de même dimension. Démontrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

□

§ 6. SOMMES DIRECTES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 33

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ notons :

$$F_k := \left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \,:\, \forall \ell \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\},\ P(\ell) = 0\right\}.$$

Démontrer que $\mathbf{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{n} F_k$. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 34

Soient $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *deux familles de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel tels que :*

$$\left(\forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad E_i\subset F_i\right)\qquad \text{et}\qquad \bigoplus_{i=1}^{n} E_i=\bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Démontrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $E_i=F_i$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 35

Soient E,F *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels,* $f\in\mathscr{L}(E,F)$ *une application linéaire et* $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* E.

Q1. — Démontrer que :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f(E_i).$$

Q2. — Supposons que f est injective et que $\sum_{i=1}^{n} E_i=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} f(E_i)=\bigoplus_{i=1}^{n} f(E_i).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 36

Soient E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et* $f\in\mathscr{L}(E)$. *Supposons qu'il existe* p *sous-espaces vectoriels non triviaux* $E_1,\dots,E_p$ *et* p *scalaires deux-à-deux distincts* $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ *tels que :*

$$\forall\, i\in[\![1,p]\!]\quad \forall\, x\in E_i\qquad f(x)=\lambda_i\cdot x.$$

Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} E_i=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 37

Soient E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u\in\mathscr{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent de nilindice* $p\in\mathbf{N}^*$.

Q1. — Démontrer que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k tel que :

$$\operatorname{Ker}\left(u^k\right)=\operatorname{Ker}\left(u^{k-1}\right)\oplus F_k.$$

Q2. — Démontrer que $E=\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Q3. — Démontrer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe de la question 2 est triangulaire supérieure. Que valent les coefficients diagonaux?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 38

Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels tels que

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \qquad \text{et} \qquad F' \subset G.$$

Démontrer que $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

□

§ 7. SOUS-ESPACES VECTORIELS ENGENDRÉS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 39

Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants à l'aide d'une équation cartésienne et déterminer une base de chacun d'entre eux.

$$F_1 := \mathrm{Vect}\,(\{(1,1,1,1)\}) \qquad F_2 := \mathrm{Vect}\,(\{(1,1,1,1),(1,1,1,-1)\}) \qquad F_3 := \mathrm{Vect}\,(\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,0,0,1)\})\,.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 40

Soient A et B deux parties d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

Démontrer :

$$\mathrm{Vect}\,(A) + \mathrm{Vect}\,(B) = \mathrm{Vect}\,(A \cup B)$$

et en déduire une nouvelle démonstration d'un résultat du cours.

□

§ 8. DIMENSION FINIE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 41

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \;:\; x+y+z+t=0\right\} \qquad G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \;:\; x+y+z+t = x-y+2z-3t=0\right\}.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 42

$\mathbf{C}$ est-il un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 43

Soit E un $\mathbf{C}$*-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.*

Démontrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $2n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 44

Démontrer que $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 45

Soient E un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Posons*

$$E^G := \{x \in E \, : \, \forall g \in G, \quad g(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes par tous les éléments de G.

Démontrer que :

$$\dim\left(E^G\right) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \cdot \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g).$$

□

§ 9. APPLICATIONS LINÉAIRES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 46

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application est linéaire. Si c'est le cas, déterminer une base de son image et de son noyau.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+1,y) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2,y) \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+|y| \end{array} \right.$$

$$f_4 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y,2x+y) \end{array} \right. \qquad f_5 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,x+z,y-z) \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 47

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P'(t) \cdot P(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array} \right.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 48

Soient E un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $\left(u, f(u)\right)$ soit liée.*

Démontrer que f est une homothétie, i.e. qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

$\square$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 49

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Q1. — Démontrer que, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une base de E.

Q2. — Déterminer les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toute base de E.

$\square$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 50

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\left(f_1, \dots, f_m\right)$ une base de F.

Q1. — Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $u_{i,j} \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} \cdot f_j.$$

Q2. — Démontrer que la famille $(u_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathscr{L}(E, F)$. Qu'en déduire pour $\mathscr{L}(E, F)$?

$\square$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 51

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & E_5 \arrow[d, "h_5"] \\
F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5
\end{tikzcd}$$

formé de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e.

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e.

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Im}(f_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$$

$$\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(g_3).$$

Démontrer que :

$$h_1, h_2, h_4, h_5 \text{ isomorphismes} \quad \Longrightarrow \quad h_3 \text{ isomorphisme.}$$

$\square$

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 52

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Q1. — Préciser l'élément neutre de $\mathscr{L}(E)$ pour la loi $\circ$ et l'élément neutre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ pour la loi $\times$.

Étant donnée une base $\mathscr{B}$ de E, notons :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u). \end{array} \right.$$

Q2. — Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres de $\mathscr{L}(E)$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q3. — Démontrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^p) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^p$.

$\square$

§ 10. FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 53

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On rappelle que le dual de E est $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$. Les éléments du dual de E sont donc les formes linéaires sur E. Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Vect}(a)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 54

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Q1. — Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E. Démontrer que φ et ψ sont colinéaires si et seulement si elles ont même noyau.

Q2. — Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et ψ des formes linéaires sur E. Démontrer :

$$\psi \in \operatorname{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \subset \operatorname{Ker}(\psi).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 55

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E.

Q1. — Démontrer que F peut s'obtenir comme une intersection finie d'hyperplans.

Q2. — Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaire pour obtenir F ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 56

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E admettant un supplémentaire commun.

Q1. — Démontrer qu'ils sont isomorphes.

Q2. — Réciproquement, deux sous-espaces vectoriels isomorphes ont-ils nécessairement un supplémentaire commun ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 57

Soient $a_0, \dots, a_n$ des scalaires deux-à-deux distincts. Notons $f_0, \dots, f_n$ les formes linéaires sur $\mathbf{K}_n[X]$ définies par :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad f_i(P) = P(a_i).$$

Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]^*$ et trouver sa base antéduale.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 58

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts.

Démontrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P(a_k).$$

□

§ 11. PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 59

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et p un projecteur de E.

Q1. — Démontrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

Q2. — Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Q3. — Réciproquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, f est-il un projecteur de E ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 60

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et s une symétrie de E

Q1. — Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Q2. — Réciproquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, u est-il une symétrie de E ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 61

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection de $\mathbf{R}^3$ sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite $\mathscr{D}$ d'équations

$$x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 62

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(A, B, M) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ tels que :

(a) $\lambda \neq \mu$

(b) $I_n = A + B$

(c) $M = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$

(d) $M^2 = \lambda^2 \cdot A + \mu^2 \cdot B$.

Q1. — Calculer $M^2 - (\lambda + \mu) \cdot M + \lambda \cdot \mu \cdot I_n$. En déduire que M est inversible, puis exprimer M^{-1}.

Q2. — Démontrer que A et B sont des projecteurs.

□

§ 12. POLYNÔMES ANNULATEURS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 63

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $u^2 - 4 \cdot u + 3 \cdot \mathrm{id}_E = 0$.

Q1. — Démontrer que u est inversible est exprimer u^{-1} en fonction de u.

Q2. — Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 64

Soient E *un* $\mathbf{R}$*-espace de dimension finie* $n \geqslant 1$ *et* $f \in \mathscr{L}(E)$ *un endomorphisme tel que* $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

Q1. — Démontrer que pour tout vecteur a non nul, la famille $\big(a, f(a)\big)$ est libre.

Q2. — Démontrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et p vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\big(\{a_i, f(a_i)\}\big).$$

Q3. — Démontrer que E est de dimension paire et trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est « simple ».

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 65

Soit E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$ *et* $u \in \mathscr{L}(E)$.

Q1. — Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \cdot u^k \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres.

Q2. — Démontrer que $\mathrm{Ann}(u) := \mathrm{Ker}\big(\varphi\big)$ contient un polynôme non nul.

Q3. — Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire μ_u (appelé polynôme minimal de u) tel que $\mathrm{Ann}(u) = \mu_u\,\mathbf{K}[X]$.

Q4. — Démontrer que :

$$u \in \mathrm{GL}(E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_u(0) \neq 0.$$

Q5. — Démontrer que, si 0 est racine simple de μ_u, alors $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$. La réciproque est-elle vraie ?

Q6. — Démontrer que, si μ_u est un polynôme de degré 2 scindé sur $\mathbf{K}$, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

□

§ 13. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS ET MATRICES NILPOTENTES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 66

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p, i.e. que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Q1. — Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $\left(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\right)$ soit libre.

Q2. — Si maintenant on suppose E de dimension finie, comparer l'indice de nilpotence p de f et de la dimension de E.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 67

Soit A une matrice nilpotente d'indice p, i.e. telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 68

Supposons E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Soient n endomorphismes nilpotents $u_1, \ldots, u_n$ de E commutant deux-à-deux.

Montrer que $u_1 \circ \ldots \circ u_n = 0$.

□

§ 14. RANG D'UN ENDOMORPHISME OU D'UNE MATRICE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 69

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.

L'identité $\mathrm{Rg}\left(f \circ g\right) = \mathrm{Rg}\left(g \circ f\right)$ est-elle nécessairement vraie ?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 70

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

Démontrer :

$$\left|\mathrm{Rg}(u) - \mathrm{Rg}(v)\right| \leqslant \mathrm{Rg}(u+v) \leqslant \mathrm{Rg}(u) + \mathrm{Rg}(v).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 71

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

Déterminer le rang de f. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 72

Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 73

Une matrice de rang r est-elle nécessairement semblable à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 74

Soient $(A, B) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})^2$ *telles qu'il existe* $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^2$ *vérifiant* $B = PAQ$. *Notons* $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ *l'endomorphisme canoniquement associé à* A.

Existe-t-il une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 75

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *telle que* $A^2 = A$.

Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que A soit semblable à :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 76

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Comparer le rang de A et le rang de sa comatrice.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 77

Supposons E *de dimension finie* n *et considérons un deuxième* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* F *de dimension finie* m. *Soient* $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.

Démontrer que $\mathrm{Rg}(g) \leqslant \mathrm{Rg}(f)$ si et seulement s'il existe $h \in \mathrm{GL}(F)$ et $k \in \mathscr{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.

□

§ 15. Sous-espaces stables

Énoncé de l'exercice 78

Ici, **K** *désigne un sous-corps de* **C**. *Soit :*

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$.

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par D.

□

§ 16. Noyau et image

Énoncé de l'exercice 79

Démontrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image. On donnera une base et une équation cartésienne.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 2x+y) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x+y, x+3y) \end{array} \right.$$

$$f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array} \right. \qquad f_4 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z) \end{array} \right.$$

$$f_5 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z, y-z) \end{array} \right. \qquad f_6 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, x+z, y-2z) \end{array} \right.$$

□

Énoncé de l'exercice 80

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ tel que

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad P'(0) \neq 0.$$

Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont en somme directe. □

Énoncé de l'exercice 81

Q1. — Donner un exemple d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et d'un endomorphisme f de E, qui est non injectif, surjectif.

Q2. — Donner un exemple d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et d'un endomorphisme f de E, qui est injectif, non surjectif.

Q3. — Donner un exemple d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et d'un endomorphisme f de E dont le noyau et l'image ne sont pas en somme directe.

□

Énoncé de l'exercice 82

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et deux endomorphismes f, g de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Démontrer les identités suivantes.

Q1. — Démontrer : $\operatorname{Ker}\left(g \circ f\right) = \ker f$.

Q2. — Démontrer : $\operatorname{Im}\left(g \circ f\right) = \operatorname{Im}\left(g\right)$.

Q3. — Démontrer : $E = \operatorname{Ker}\left(f\right) \oplus \operatorname{Im}\left(g\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 83

Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$ On ne suppose pas nécessairement E de dimension finie.

Q1. — Démontrer que $\operatorname{Ker}\left(g \circ f\right) = \operatorname{Ker}\left(f\right)$.

Q2. — Démontrer que $\operatorname{Im}\left(g \circ f\right) = \operatorname{Im}\left(g\right)$.

Q3. — Démontrer que $E = \operatorname{Ker}\left(f\right) \oplus \operatorname{Im}\left(g\right)$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 84

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Q1. — Montrer que les suites $\left(\operatorname{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ et $\left(\operatorname{Im}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion, puis constantes à partir d'un certain rang $p \leqslant n$.

Q2. — Montrer que la suite $\left(\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^k\right)\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Q3. — Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$.

Q4. — En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où N est une matrice carrée nilpotente et A une matrice carrée inversible.

□

§ 17. PRODUIT MATRICIEL

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 85

Soit $(A, B) \in \mathscr{T}_n(\mathbf{K})^2$, où $\mathscr{T}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui sont triangulaires supérieures.

Démontrer que $AB \in \mathscr{T}_n(\mathbf{K})$ et que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i} \times [B]_{i,i}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 86

Déterminer, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$C_{i,j} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \;:\; AE_{i,j} = E_{i,j}A\right\}$$

puis, en déduire l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

□

§ 18. Inversibilité et inverse éventuelle

Énoncé de l'exercice 87

Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & -4 \\ 7 & -21 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer son inverse le cas échéant.

□

Énoncé de l'exercice 88

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Démontrer que A est inversible si et seulement si pour toute matrice colonne $X \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nulle, $AX \neq 0$.

□

Énoncé de l'exercice 89

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ *une matrice diagonalement dominante, i.e. telle que pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\left|a_{i,i}\right| > \sum_{j \neq i} \left|a_{i,j}\right|.$$

Démontrer que A est inversible.

□

Énoncé de l'exercice 90

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ *telle que* $f(I_n) = 1$ *et :*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, \quad f(AB) = f(A) f(B).$$

Démontrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad f(A) \neq 0 \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

□

§ 19. Puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice

Énoncé de l'exercice 91

Soit f *un endomorphisme de* $\mathbf{R}^3$*, non nul, tel que* $f^3 + f = 0$.

Q1. — Prouver que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Q2. — Justifier que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Q3. — Prouver qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q4. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Prouver qu'il existe un endomorphisme f_n de $\mathbf{R}^3$ tel que $\left(f_n\right)^n = f$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 92

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, *notons* $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ *et posons*

$$F := \left\{M(a,b),\ (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Q1. — Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?

Posons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & M\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right). \end{array} \right.$$

Q2. — Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres.

Q3. — Pour tout couple $(a,b) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})^2$ et tout entier naturel n, calculer $M(a,b)^n$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 93

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

□

§ 20. TRACE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 94

Démontrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2, \quad \mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA).$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 95

Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$.

Résoudre, dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'équation $X = \mathrm{Tr}\,(X) \cdot A + B$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 96

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *une matrice de trace nulle.*

Q1. — Démontrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

Q2. — Montrer qu'il existe deux matrices $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = BC - CB$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 97

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, notons f_A la forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad f_A(M) = \operatorname{Tr}(AM).$$

Q1. — Démontrer que l'application

$$\iota \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Q2. — Justifier que pour tout forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = f_A$.

Soit $\varphi \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^*$ telle que :

$$\forall (M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2, \quad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

Q3. — Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \operatorname{Tr}$.

□

§ 21. TRANSPOSÉE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 98

Soit $(p, n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Démontrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})^2, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

□

§ 22. MATRICES À COEFFICIENTS ENTIERS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 99

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})^2$.

Q1. — Démontrer que $\operatorname{Det}(A)$ et $\operatorname{Det}(B)$ sont des entiers relatifs.

Q2. — Supposons $\operatorname{Det}(A)$ et $\operatorname{Det}(B)$ premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que :

$$UA + VB = I_n.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 100

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ telle que A inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\operatorname{Det}(A) \in \{-1, 1\}$.

□