RÉVISIONS SUR LES POLYNÔMES

TD 2

par David Blottière, le 20 septembre 2023 à 20h50

SOMMAIRE

§ 1. EXERCICES ISSUS DES ORAUX DU CCINP

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

On considère les polynômes $P(X) = 2X^4 - 3X^2 + 1$ *et* $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

Q1. — Décomposer P en produit de facteurs premiers dans $\mathbf{C}[X]$ (on pourra calculer $P(1)$ et $P(-1)$).

Q2. — Décomposer Q en produit de facteurs premiers dans $\mathbf{C}[X]$ (on pourra calculer $Q(-2)$).

Q3. — Déduire des questions précédentes l'existence de polynômes U, V tels que $PU + QV = 1$.

Q4. — Indiquer une méthode pour déterminer les polynômes U,V à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

On considère les polynômes $P(X) = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ *et* $Q(X) = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

Q1. — Décomposer P et Q en produits de facteurs premiers dans $\mathbf{R}[X]$ puis dans $\mathbf{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et Q en 1 et en 2).

Q2. — Déterminer le PGCD et le PPCM de P et de Q.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Notons f *l'endomrophisme de* $\mathbf{K}_n[X]$ *défini par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P'. \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est injectif de deux façons différentes.

(a) En utilisant la matrice de f dans la base canonique.

(b) Sans utiliser la matrice de f dans la base canonique.

Q2. — Soit $Q \in \mathbf{K}_n[X]$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. Indication : si $P \in \mathbf{K}_n[X]$, que vaut $P^{(n+1)}$?

□

Énoncé de l'exercice 4

Q1. — Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$. Effectuer la division euclidienne de $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$ par X^2+2.

Q2. — Déterminer les valeurs de $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$ pour lesquelles X^2+2 divise de $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

□

Énoncé de l'exercice 5

Notons Φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X)-P(X-1). \end{array} \right.$$

Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ et en Déduire $\operatorname{Ker}(\Phi)$ et $\operatorname{Im}(\Phi)$.

□

Énoncé de l'exercice 6

Soient $P\in\mathbf{R}[X]$ et $z\in\mathbf{C}$ une racine de P.

Q1. — Démontrer que $\overline{z}$ est une racine de P.

Désormais nous supposons que z est une racine de P qui est complexe non réelle.

Q2. — Démontrer que $X^2-2\operatorname{Re}(z)X+|z|^2$ divise P.

Q3. — Démontrer que, si z est racine de P d'ordre $n\in\mathbf{N}^*$, alors $\overline{z}$ est racine de P d'ordre n.

□

Énoncé de l'exercice 7

Soit $P\in\mathbf{C}[X]$.

Q1. — Démontrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-P(X)$.

Q2. — En déduire que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.

Q3. — Pour tout $n\in\mathbf{N}$, montrer que $P(X)-X$ divise $P^n(X)-X$, où P^n désigne le polynôme obtenu en composant P n fois avec lui-même.

□

Énoncé de l'exercice 8

Soient $(A,B)\in\mathbf{C}[X]^2$ tels que $A\wedge B=1$.

Démontrer qu'il existe un unique couple $(U,V)\in\mathbf{C}[X]^2$ tel que :

$$AU+BV=1 \qquad , \qquad \deg(U)<\deg(B) \quad \text{et} \quad \deg(V)<\deg(A)\,.$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9

Soient $(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

Démontrer que $(X^p - 1) \wedge \left(X^q - 1\right) = X^{p \wedge q} - 1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 10

Soient $(A,B) \in \mathbf{C}[X]^2$.

Démontrer que $(A+B) \wedge AB = 1$ si et seulement si $A \wedge B = 1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 11

Résoudre l'équation

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbf{C}$, sachant que la somme de deux racines est égale à la troisième. □

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 12

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = P(X)^2$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 13

Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que P' divise P.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 14

Déterminer les complexes a, b, c vérifiant les trois conditions

(a) $|a| = |b| = |c| = 1$;

(b) $a + b + c = 1$;

(c) $abc = 1$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 15

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}_3[X]$ tels que :

$$P(j) = P'\left(j^2\right) = j^2 \qquad \text{et} \qquad P\left(j^2\right) = P'(j) = j.$$

□

Énoncé de l'exercice 16

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifiant $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)\ P(X)$.

□

Énoncé de l'exercice 17

Soient $a \in \left]0,\pi\right[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$.

□

Énoncé de l'exercice 18

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

Q1. — Soit $a \in \mathbf{C}$ une racine de P. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, a^{2^n} est racine de P.

Q2. — En déduire que $a = 0$ ou $|a| = 1$.

Q3. — Démontrer qu'en outre, $a = -1$ ou $|a+1| = 1$.

Q4. — En déduire tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

□

Énoncé de l'exercice 19

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 7. On suppose que $P + i$ est multiple de $(X-i)^4$.

Déterminer P' et en déduire P.

□

Énoncé de l'exercice 20

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous introduisons le polynôme de Legendre $P_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)$.

Q1. — Étudier le degré de P_n ainsi que sa parité.

Q2. — Démontrer que $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.

Q3. — Démontrer que P_n possède n racines distinctes dans $]-1,1[$.

□

Énoncé de l'exercice 21

Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, posons $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

Q1. — Démontrer que $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q2. — Exprimer chacun des polynômes $1, X, \ldots, X^n$ dans la base précédente.

□

Énoncé de l'exercice 22

Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X). \end{array} \right.$$

Q1. — Démontrer que f est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Q2. — Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$. Démontrer qu'il existe un unique $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(0)=0$ et $Q=f(P)$. Simplifier alors $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$.

Q3. — Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Généraliser.

□

Énoncé de l'exercice 23

Soient $(P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2$. Notons D_1 leur PGCD dans $\mathbf{R}[X]$ et D_2 leur PGCD dans $\mathbf{C}[X]$.

Démontrer que $D_1 = D_2$.

□

§ 2. Exercices issus des oraux du concours CentraleSupélec

Énoncé de l'exercice 24

Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ de degrés respectifs n et m.

Q1. — Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme $u_{P,Q}$ de $\mathbf{C}_{n+m-1}[X]$ tel que :

$$\forall (A,B) \in \mathbf{C}_{m-1}[X] \times \mathbf{C}_{n-1}[X], \qquad u_{P,Q}\left(X^n A + B\right) = PA + QB.$$

Q2. — Donner la matrice de $u_{P,Q}$ dans la base canonique.

Q3. — Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u_{P,Q}$ soit un automorphisme.

On suppose désormais que P et Q sont à coefficients rationnels. Pour tout $y \in \mathbf{C}$, notons $Q_y(X) = Q(y-X)$ (il s'agit d'une composition et non d'une multiplication) et $T(y) = \det\left(u_{P,Q_y}\right)$.

Q4. — Démontrer que T est une fonction polynomiale à coefficients rationnels.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ tels que $P(\alpha) = Q(\beta) = 0$.

Q5. — Déterminer deux polynômes $R, S \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R(\alpha+\beta) = S(\alpha\beta) = 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 25

On dit qu'une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}}$ *de polynômes vérifie la propriété* (C) *si :*

(a) $P_0 = 1$

(b) $P_1 \neq 0$

(c) $\forall\,(n,x,y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\cdot P_{n-k}(y).$

Q1. — Démontrer que la suite $\left(\dfrac{X^n}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la propriété (C).

Notons $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par* $P_0 = 1$ *et :*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad P_n(X) = \frac{X}{n!}\cdot(n+X)^{n-1}.$$

Q2. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n'(X) = P_{n-1}(X+1)$.

Q3. — En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la propriété (C).

Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *vérifiant la propriété* (C).

Q4. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n(0) = 0$.

Q5. — Démontrer que $\deg(P_1) = 1$.

Q6. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est de degré n et calculer son coefficient dominant.

Q7. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $a_n = P_n'(0)$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n' = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\cdot P_k$.

Q8. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Existe-t-il toujours une suite (P_n) vérifiant la propriété (C) telle que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad P_n'(0) = a_n\ ?$$

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 26

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. *Notons* $\mathbb{U}_n$ *l'ensemble des racines* n*-ièmes de l'unité.*

Q1. — Soit $p \in \mathbf{N}$. Calculer $\sum_{\zeta\in\mathbb{U}_n} \zeta^p$.

Q2. — Soit $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Démontrer que :

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| \leqslant \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

□

§ 3. EXERCICES ISSUS DES ORAUX DU CONCOURS MINES PONTS

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 27

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Q1. — Exprimer, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$:

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

à l'aide d'un polynôme en $\operatorname{cotan}^2(x)$.

Q2. — En déduire les racines du polynôme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{n-k}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 28

Soient $n \in \mathbf{N}$ *et* $Q \in \mathbf{R}_n[X]$.

Q1. — Démontrer qu'il existe un unique $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

Q2. — Supposons que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $Q(x) \geqslant 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 29

Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le noyau, le rang et l'image de :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)+P(X-1)-2P(X). \end{array} \right.$$

□

§ 4. EXERCICES ISSUS DES ORAUX DU CONCOURS POLYTECHNIQUE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 30

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$.

Démontrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 31

Soient $P \in \mathbf{C}[X]$, $a \in \mathbf{C}$ *tel que :*

- $P(a) \neq 0$;
- *a racine d'ordre $k \in \mathbf{N}^*$ du polynôme $P - P(a)$.*

Démontrer que, pour tout $\rho > 0$ suffisamment petit, il existe $2k$ points $z_1, \ldots, z_{2k}$ sur le cercle de centre a et de rayon ρ tels que :

$$|P(z_1)| = \ldots = |P(z_{2k})| = |P(a)|.$$

□

Énoncé de l'exercice 32

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) \in \mathbf{Z}$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $P(k) \in \mathbf{Z}$.

Q2. — Notons d le pgcd de $P(0), \ldots, P(n)$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, d divise $P(k)$.

□

Énoncé de l'exercice 33

Soient $(P, Q, R) \in \mathbf{C}[X]^3$ et un entier $n \geqslant 3$ tels que :

$$P^n + Q^n + R^n = 0.$$

Démontrer que les polynômes P, Q, R sont égaux à une constante multiplicative près.

□

§ 5. Exercices issus des oraux des concours ÉNS

Énoncé de l'exercice 34

Soient un entier $n \geqslant 1$ et $z_0, \ldots, z_n$ des complexes distincts deux-à-deux. On suppose que :

$$\forall P \in \mathbf{C}_{n-1}[X], \quad P(z_0) = \sum_{k=1}^{n} P(z_k).$$

Démontrer que $z_1, \ldots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier centré en z_0.

□