DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

TABLE 1

par David Blottière, le 30 octobre 2023 à 07h33

Dans le tableau ci-dessous, n désigne un entier naturel non nul et α un réel.

Développements limités	Indications pour retrouver les développements limités
$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Si $x \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Composition par $x \longmapsto -x$ à droite dans le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	Composition par $x \longmapsto -x^2$ à droite dans le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$	ch est la partie paire de exp.
$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	sh est la partie impaire de exp.
$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \mathrm{ch}(ix)$.
$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i}$.
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$	Par dérivabilité $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, par produit $\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, puis primitivation avec $\tan' = 1 + \tan^2$.
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la dérivée k-ième de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est $x \longmapsto \left(\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)\right) \cdot (1+x)^{\alpha-k}$ (récurrence sur k)