SUITES NUMÉRIQUES ET ESPACES VECTORIELS NORMÉS I

COLLE S9

13/11–17/11

par David Blottière, le 10 novembre 2023 à 15h02

SOMMAIRE

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice ou l'examinateur (12 points) : La colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 6 — Espaces vectoriels normés [PDF]

1. Normes sur un espace vectoriel
2. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
3. Comparaison de normes
4. Topologie d'un espace vectoriel normé
5. Étude locale d'une application, continuité

§ 4. À VENIR

Suite du chapitre 6 — Espaces vectoriels normés

6. Applications linéaires et multilinéaires continues
7. Parties compactes d'un espace vectoriel normé
8. Applications continues sur une partie compacte
9. Connexité par arcs
10. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 7 — Révisions sur l'intégration sur un segment et les EDL1 scalaires

Chapitre 8 — Intégrales généralisées

Chapitre 9 — Révisions et compléments sur les séries numériques

Chapitre 10 — Dénombrabilité et familles sommables

Chapitre 11 — Suites et séries de fonctions

Chapitre 12 — Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Définition d'une partie ouverte d'un espace vectoriel normé [n°73 du chapitre 6, énoncé]. Propriété topologique d'une boule ouverte [n°77 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°2. — Définition d'une partie fermée d'un espace vectoriel normé [n°73 du chapitre 6, énoncé]. Propriété topologique d'une boule fermée [n°77 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°3. — Opérations sur les parties ouvertes d'un espace vectoriel normé [n°78 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Propriétés topologique d'une sphère [n°81 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°4. — Définition de l'adhérence d'une partie d'un espace vectoriel normé [n°90 du chapitre 6, énoncé]. Propriétés de minimalité de l'adhérence d'une partie d'un espace vectoriel normé [n°94 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Caractérisation des fermés *via* l'adhérence [n°95 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°5. — Caractérisation séquentielle de l'adhérence [n°96 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. L'ensemble :

$$F := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \, : \, x = y\right\}$$

est une partie fermée de $\left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_2\right)$ [n°97 du chapitre 6, démonstration].

QUESTION N°6. — Définition d'une partie dense dans un espace vectoriel normé [n°100 du chapitre 6, énoncé]. Caractérisation séquentielle de la densité [n°104 du chapitre 6, énoncé]. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est une partie ouverte et dense de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ [n°106 du chapitre 6, démonstration].

QUESTION N°7. — Dans un espace vectoriel normé, structure de l'adhérence d'un sous-espace vectoriel et alternative topologique des hyperplans [n°107 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°8. — Définition de l'intérieur d'une partie d'un espace vectoriel normé [n°109 du chapitre 6, énoncé]. Propriété de maximalité de l'intérieur d'une partie [n°111 du chapitre 6, énoncé]. Adhérence, intérieur et complémentaire [n°113 du chapitre 6, énoncé]. Dans $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme $||\cdot||_1$, adhérence de A et intérieur de B où :

$$A := \left\{P \in \mathbf{R}[X] \ : \ \sum_{n=0}^{+\infty} [P]_n > 0\right\} \quad \text{et} \quad B := \left\{P \in \mathbf{R}[X] \ : \ \sum_{n=0}^{+\infty} [P]_n = 0\right\}$$

[n°116 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°9. — Propriétés topologiques invariantes et équivalences de normes [n°121 du chapitre 6, énoncé intégrale et démonstration pour les ouverts].

QUESTION N°10. — Définition d'une limite de fonction [n°124 du chapitre 6, énoncé et figure]. Reformulation de cette définition avec des boules [n°125 du chapitre 6, énoncé]. Unicité de la limite d'une fonction [n°126 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°11. — Composition de limites de fonctions [n°128 du chapitre 6, énoncé]. Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction [n°129 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°12. — Définition de la continuité d'une fonction [n°131 du chapitre 6, énoncé]. L'espace vectoriel des fonctions continues [n°132 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. D'autres modes de constructions de fonctions continues [n°133 du chapitre 6, énoncé].

QUESTION N°13. — Prolongement d'identités par continuité et densité [n°134 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Caractérisation de la continuité d'une application par les ouverts [n°135 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°14. — Définition d'une application uniformément continue [n°138 du chapitre 6, énoncé]. Exemple d'une application continue et non-uniformément continue [n°140 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. L'application distance à une partie non vide d'un espace vectoriel normé est 1-lipschitzienne [n°146 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°15. — Définition d'une application lipschitzienne [n°141 du chapitre 6, énoncé]. Une application lipschitzienne est uniformément continue [n°142 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Exemple d'une application uniformément continue mais non-lipschitzienne [n°143 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°34. — Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
(1) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
(2) Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
(3) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(4) Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

EXERCICE CCINP N°35. — E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $||\,||_E$ (respectivement $||\,||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).
(1) Soient f une application de E dans F et a un point de E. On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
(2) Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice CCINP n°44. — Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
(1) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
(2) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
(3) Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(4) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
(5) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice CCINP n°45. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
(1) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
(2) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
(3) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
(4) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall t \in [0,1],\ d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$. Prouver que A est convexe.

§ 7. Rapport de colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.