Suites numériques et espaces vectoriels normés I

par David Blottière, le 3 novembre 2023 à 09h24

Colle S8

6/11–10/11

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. <u>Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité</u>
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. <u>Écoute des conseils/consignes</u>

§ 3. Programme

Chapitre 5 — Révisions sur les suites numériques [PDF]

1. Suite de nombres réels convergente
2. Suite de nombres réels divergeant vers $-\infty$ (resp. $+\infty$)
3. Théorème de la limite monotone et conséquences
4. Valeur d'adhérence
5. Théorème de Bolzano-Weierstraß
6. Suites complexes

Études de suites numériques particulières

1. Suites arithmétiques
2. Suites géométriques
3. Suites arithmético-géométrique
4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
5. Suites définies par récurrence [PDF]
6. Suites définies de manières implicites

Développements limités

1. Table des développements limités usuels [PDF]
2. Exemples d'applications [PDF]

Chapitre 6 — Espaces vectoriels normés [PDF]

1. Normes sur un espace vectoriel
2. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
3. Comparaison de normes

§ 4. À venir

Suite du chapitre 6 — Espaces vectoriels normés

1. Topologie d'un espace vectoriel normé
2. Étude locale d'une application, continuité
3. Applications linéaires et multilinéaires continues
4. Parties compactes d'un espace vectoriel normé
5. Applications continues sur une partie compacte
6. Connexité par arcs
7. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 7 — Révisions sur l'intégration sur un segment et les EDL1 scalaires

Chapitre 8 — Intégrales généralisées

Chapitre 9 — Révisions et compléments sur les séries numériques

Chapitre 10 — Dénombrabilité et familles sommables

Chapitre 11 — Suites et séries de fonctions

Chapitre 12 — Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Table des développements limités usuels [énoncé et démonstration d'une identité au choix de l'interrogatrice/teur].

QUESTION N°2. — Passage à la limite dans une inégalité large [n°12 du chapitre 5, énoncé]. Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) [n°14 du chapitre 5, énoncé et démonstration].

QUESTION N°3. — Définition d'une suite réelle divergeant vers $+\infty$ [n°19 du chapitre 5, énoncé]. Théorème de domination pour la divergence vers $+\infty$ [n°19 du chapitre 5, énoncé et démonstration].

QUESTION N°4. — Théorème de la limite monotone pour les suites [n°33 du chapitre 5, énoncé et démonstration, les deux dans le cas croissant].

QUESTION N°5. — Théorème des suites adjacentes [n°36 du chapitre 5, énoncé intégral incluant les inégalités finales et démonstration].

QUESTION N°6. — Forme indéterminée $1^{+\infty}$: si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels qui converge vers 1 alors la suite $\left(u_n^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ peut :

(a) converger vers un réel x strictement positif [exemple et justification] ;
(b) converger vers 0 [exemple et justification] ;
(c) diverger vers $+\infty$ [exemple et justification] ;
(d) n'admettre aucune limite finie ou infinie [exemple et justification].

QUESTION N°7. — Définition d'une valeur d'adhérence de suite réelle [n°42 du chapitre 5, énoncé]. Valeur d'adhérence de suite réelle convergente [n°44 du chapitre 5, énoncé et démonstration en admettant le lemme clé].

QUESTION N°8. — Théorème de Bolzano-Weierstraß [n°52 du chapitre 5, énoncé et esquisse de démonstration avec un schéma]. Suite réelle bornée ayant une unique valeur d'adhérence [n°53 du chapitre 5, énoncé et démonstration].

QUESTION N°9. — Définition d'une norme sur un espace vectoriel [n°1 du chapitre 6, énoncé]. Les trois normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ [n°6 du chapitre 6, énoncé et démonstration]

QUESTION N°10. — Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel [énoncé et démonstration]. Norme associée à un produit scalaire [n°4 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°11. — Si $(p,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ alors l'application :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})\times\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \operatorname{Tr}\left(A^\top\times B\right)=\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}\dots \end{array}\right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ [énoncé complété et démonstration]. Si a et b sont deux nombres réels tels que $a<b$, alors l'application :

$$||\cdot||_\infty \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right| \end{array}\right.$$

définit une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ [n°8 du chapitre 6, démonstration]. Représentation graphique d'une boule fermée dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}),||\cdot||_\infty\right)$ [n°18 du chapitre 6, schéma précédé d'une explication].

QUESTION N°12. — Distance associé à une norme [n°12 du chapitre 6, énoncé]. Propriétés d'une distance [n°13 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°13. — Définitions d'une boule ouverte, d'une boule fermée, d'une sphère [n°14 du chapitre 6, énoncé]. Représentations graphiques des boules unité fermées de $\mathbf{R}^2$ pour les trois normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ [n°17 du chapitre 6, schémas précédés d'explications].

QUESTION N°14. — Définition d'un segment d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel [n°21 du chapitre 6, énoncé]. Définition d'une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel [n°23 du chapitre 6, énoncé]. Les boules d'un espaces vectoriels normés sont convexes [n°27 du chapitre 6, énoncé et démonstration pour une boule fermée].

QUESTION N°15. — Définition d'une application bornée [n°36 du chapitre 6, énoncé]. L'espace vectoriel normé des applications bornées [n°37 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°16. — Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés [n°38 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°17. — Définition d'une suite de vecteurs convergente [n°39 du chapitre 6, énoncé]. Reformulation de la notion de convergence [n°40 du chapitre 6, énoncé]. Unicité de la limite d'une suite convergente [n°41 du chapitre 6, énoncé].

QUESTION N°18. — Définition d'une suite bornée [n°34 du chapitre 6, énoncé]. Toute suite convergente est bornée [n°42 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°19. — L'espace des suites convergentes [n°43 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°20. — Convergence dans un espace produit [n°48 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°21. — Définition de deux normes équivalentes [n°61 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Équivalence des trois normes usuelles $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ [n°63 du chapitre 6, énoncé des inégalités et démonstrations].

QUESTION N°22. — Définition d'une partie bornée [n°30 du chapitre 6, énoncé]. Normes équivalentes et parties bornées [n°66 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

QUESTION N°23. — Critère séquentiel de comparaison des normes [n°68 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Convergence et équivalence de normes [n°69 du chapitre 6, énoncé].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°1. — (1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

EXERCICE CCINP N°37 (TRONQUÉ). — On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

(1) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
(2) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant k\, N_\infty(f)$.
(3) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

EXERCICE CCINP N°43. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.
(1) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
(2) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
(3) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

EXERCICE CCINP N°55. — Soit a un nombre complexe On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2a u_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

(1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(2) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
(3) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

EXERCICE CCINP N°76. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

(1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(2) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.

(3) Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right),\, \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\,,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.