RÉDUCTION II

par David Blottière, le 16 octobre 2023 à 19h06

COLLE S7

16/10–20/10

SOMMAIRE

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 15 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Chapitre 4 — Réduction des endomorphismes et des matrices [PDF]

1. Compléments d'algèbre linéaire : somme directe d'un nombre fini de sous-espace et matrices par blocs
2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée
3. Polynôme caractéristique
4. Diagonalisabilité
5. Trigonalisabilité
6. Polynômes d'endomorphismes
7. Nilpotence
8. Un pas vers la réduction de Jordan

§ 4. À venir

Chapitre 5 — Révisions : suites numériques, fonctions réelles de la variable réelle

Chapitre 6 — Espaces vectoriels normés

§ 5. Questions de cours

Question n°1. — Définition d'une matrice diagonalisable [n°78 du chapitre 4, énoncé]. Définition d'un endomorphisme diagonalisable [n°83 du chapitre 4, énoncé]. Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie munie d'une base $\mathscr{B}$ et u est un endomorphisme de E, alors u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ [n°84 du chapitre 4, démonstration].

Question n°2. — Critère de diagonalisabilité via une décomposition de l'espace à l'aide des sous-espaces propres [n°87 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Critère de diagonalisabilité via la somme des dimensions des sous-espaces propres [n°89 du chapitre 4, énoncé].

Question n°3. — Condition suffisante de diagonalisabilité [n°90 du chapitre 4, énoncé]. La condition suffisante précédente n'est pas nécessaire [n°91 du chapitre 4, contre-exemple]. Critère de diagonalisabilité via le polynôme caractéristique et les multiplicité [n°93 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

Question n°4. — Diagonalisation (non guidée) d'une matrice $(3,3)$ diagonalisable possédant une valeur propre « évidente » proposée par l'interrogatrice/teur.

Question n°5. — Définition d'une matrice trigonalisable [n°101 du chapitre 4, énoncé]. Définition d'un endomorphisme trigonalisable [n°105 du chapitre 4, énoncé]. Critère de trigonalisabilité via le polynôme caractéristique [n°107 du chapitre 4, énoncé intégral et démonstration de l'implication délicate].

Question n°6. — Réduction d'une matrice carrée à coefficients complexes [n°108 du chapitre 4, énoncé]. Trace et déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ [n°109 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Trigonalisation (non guidée) d'une matrice $(2,2)$ trigonalisable proposée par l'interrogatrice/teur.

Question n°7. — Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E, définition et propriétés de l'application fondamentale de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$ [n°114 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Propriété remarquable de deux polynômes d'un même endomorphisme [n°115 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

Question n°8. — Valeurs propres et polynômes d'endomorphisme [n°118 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Exemple d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et d'un polynôme P tels que $P(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) \subsetneq \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P)$.

Question n°9. — Théorème de Cayley-Hamilton [n°119 du chapitre 4, énoncé et démonstration pour une matrice diagonale, puis pour une matrice diagonalisable].

QUESTION N°10. — Définition du polynôme minimal [n°122 du chapitre 4, énoncé]. Spectre du polynôme minimal [n°123 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°11. — Lemme des noyaux [n°128 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Lemme des noyaux généralisés [n°129 du chapitre 4, énoncé].

QUESTION N°12. — Caractérisation algébrique de la diagonalisabilité [n°131 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°13. — Caractérisation algébrique de la trigonalisabilité [n°133 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°14. — Diagonalisabilité et endomorphisme induit [n°134 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Caractérisation algébrique de la nilpotence [n°137 du chapitre 4, énoncé].

QUESTION N°15. — Décomposition spectrale d'un endomorphisme trigonalisable [n°140 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE D'ORAUX CCINP À ÉTUDIER

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°69. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

EXERCICE CCINP N°72. — Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

EXERCICE CCINP N°73. — On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

EXERCICE CCINP N°88. —

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

EXERCICE CCINP N°93. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.