Algèbre linéaire 1ère année et Réduction I

par David Blottière, le 5 octobre 2023 à 20h08

Colle S6

9/10–13/10

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 15 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. <u>Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité</u>
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. <u>Écoute des conseils/consignes</u>

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 3 — Révisions d'algèbre linéaire [PDF]

1. **K**-espace vectoriels
2. Sous-espaces vectoriels
3. Familles de vecteurs remarquables finies
4. Familles de vecteurs remarquable
5. Dimension finie
6. Applications linéaires
7. Matrices d'applications linéaires
8. Matrices
9. Hyperplans et formes linéaires
10. Déterminant

Chapitre 4 — Réduction des endomorphismes et des matrices [PDF]

1. Compléments d'algèbre linéaire : somme directe d'un nombre fini de sous-espace et matrices par blocs
2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée
3. Polynôme caractéristique

§ 4. À VENIR

Chapitre 4 — Réduction des endomorphismes et des matrices (suite) [PDF]

4. Diagonalisabilité
5. Trigonalisabilité
6. Polynômes d'endomorphismes
7. Nilpotence
8. Un pas vers la réduction de Jordan

Chapitre 5 — Révisions : suites numériques, fonctions réelles de la variable réelle

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Lemme clé pour le théorème de la base extraite [n°77 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Théorème de la base extraite et conséquence [n°78 du chapitre 3, énoncé]

QUESTION N°2. — Lemme clé pour le théorème de la base incomplète [n°79 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Théorème de la base incomplète [n°80 du chapitre 3, énoncé].

QUESTION N°3. — Lemme clé pour le cardinal des familles remarquables [n°82 du chapitre 3, énoncé et démonstration].

QUESTION N°4. — Sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie [n°87 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Un critère d'égalité pour deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie [n°90 du chapitre 3, énoncé].

QUESTION N°5. — Formule de Grassmann [n°91 du chapitre 3, énoncé et démonstration].

QUESTION N°6. — Détermination de l'image d'une application linéaire à l'aide d'une famille génératrice de sa source [n°105 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, où $(n,p) \in [\![3,5]\!]^2$, proposée par l'interrogatrice/teur.

QUESTION N°7. — Théorème du rang [n°108 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Critères d'isomorphie entre deux espaces de dimension finie [n°110 du chapitre 3, énoncé].

QUESTION N°8. — Calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire, via la matrice d'icelle dans des bases [n°117 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Composée d'applications linéaires versus produit matriciel [n°120 du chapitre 3, énoncé et démonstration].

QUESTION N°9. — Définition du rang d'une matrice [n°126 du chapitre 3, énoncé]. Calcul effectif du rang d'une matrice [n°127 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Calcul du rang d'une matrice proposée par l'interrogatrice/teur.

QUESTION N°10. — Théorème de changement de base pour les applications linéaires [n°132 du chapitre 3, énoncé et démonstration]. Diagonalisation guidée d'une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ proposée par l'interrogatrice/teur.

QUESTION N°11. — Produit de deux matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ [n°142 du chapitre 3, énoncé et preuve]. Définition d'une matrice inversible [n°151 du chapitre 3, énoncé]. Synthèse personnelle sur les différents critères d'inversibilité des matrices carrées [énoncé, discussion avec l'interrogatrice/teur].

QUESTION N°12. — Propriétés de la trace d'une matrice carrée [n°158 du chapitre 3, énoncé intégral et démonstration de (2)]. Définition de la trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie non nulle [n°159 du chapitre 3, énoncé et justification de l'indépendance en le choix de la base].

QUESTION N°13. — Propriétés de la transposée d'une matrice carrée [n°162 du chapitre 3, énoncé intégral et démonstration de (3)]. Synthèse sur les différentes propriétés du rang d'une matrice [énoncé, discussion avec l'interrogatrice/teur].

QUESTION N°14. — Définition d'un hyperplan [n°167 du chapitre 3, énoncé]. Caractérisation des hyperplans d'un espace de dimension finie non nulle [n°171 du chapitre 3, énoncé et démonstration].

QUESTION N°15. — Calcul fondamental pour la définition du déterminant [n°178 du chapitre 3, définition précise des objets en jeu et calcul sans énoncé préalable]. Définition du déterminant [n°180 du chapitre 3, énoncé].

QUESTION N°16. — Formule de développement d'un déterminant de matrice carrée par rapport à une ligne (resp. colonne) [n°209 du chapitre 3, énoncé]. Calcul du déterminant d'une matrice carrée de format $(4,4)$, proposée par l'interrogatrice/teur.

QUESTION N°17. — Définition de la comatrice d'une matrice carrée [n°214 du chapitre 3, énoncé]. Relation fondamental entre une matrice et sa comatrice [n°215 du chapitre 3, énoncé et démonstration].

QUESTION N°18. — Définition de la somme d'un nombre fini de sous-espaces [n°27 du chapitre 3, énoncé]. Structure de la somme d'un nombre fini de sous-espaces [n°28 du chapitre 3, énoncé]. Définition d'un nombre fini de sous-espaces en somme directe [n°29 du chapitre 3, énoncé]. Critère pour qu'un nombre fini de sous-espaces soient en somme directe [n°30 du chapitre 3, énoncé et démonstration].

QUESTION N°19. — Propriété des projecteurs associés à une décomposition de l'espace en somme directe [n°1 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Dimension de la somme d'un nombre fini de sous-espaces [n°3 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°20. — Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs [n°12 du chapitre 4, énoncé intégral et démonstration de (1) par récurrence sur la taille du premier bloc diagonal].

QUESTION N°21. — Définitions des éléments propres d'un endomorphisme [n°29 et 34 du chapitre 4, énoncé]. Détermination des éléments propres d'un endomorphisme nilpotent [n°38 du chapitre 4, résolution]. Détermination des éléments propres de la dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ [n°40 du chapitre 4, résolution].

QUESTION N°22. — Définitions des éléments propres d'une matrice carrée [n°41 du chapitre 4, énoncé]. Calcul des éléments propres d'une matrice carrée de format $(3,3)$, proposée par l'interrogatrice/teur.

QUESTION N°23. — Propriété remarquable des sous-espaces propres [n°45 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Conséquences du précédent résultat [n°46 du chapitre 4, énoncé].

QUESTION N°24. — Éléments propres d'un endomorphismes versus éléments propres d'une matrice qui le représente [n°49 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Définition du polynôme caractéristique d'une matrice [n°51 du chapitre 4, énoncé]. Polynôme caractéristique de deux matrices semblables [n°53 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°25. — Définition du polynôme caractéristique d'un endormorphisme [n°56 du chapitre 4, énoncé et justification du caractère bien défini]. Des coefficients du polynôme caractéristique [n°59 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°26. — Valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique [n°62 du chapitre 4, énoncé et démonstration]. Nombre de valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie [n°64 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

QUESTION N°27. — Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit [n°70 du chapitre 4, énoncé de 1. et démonstration de 1.]. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre [n°72 du chapitre 4, énoncé et démonstration].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE D'ORAUX CCINP À ÉTUDIER

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°60. — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

EXERCICE CCINP N°64. — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

EXERCICE CCINP N°71. — Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

EXERCICE CCINP N°83. — Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$. Déterminer $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$. **Indication** : penser à utiliser le déterminant.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.