Polynômes

par David Blottière, le 23 septembre 2023 à 08h36

Colle S4

25/9–29/9

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 15 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Chapitre 2 — Révisions sur les polynômes [PDF]

1. Rappels sur la construction de $\mathbf{K}[X]$
2. Degré d'un polynôme
3. Division euclidienne
4. Polynôme dérivé
5. Racines d'un polynôme
6. PGCD et PPCM
7. Décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles

§ 4. À venir

Chapitre 3 — Révisions d'algèbre linéaire

Chapitre 4 — Réduction des endomorphismes 1, polynôme caractéristique

§ 5. Questions de cours

Question n°1. — Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$ [n°20 du chapitre 2, énoncé et démonstration].

Question n°2. — Définition du polynôme dérivé [n°29 du chapitre 2, énoncé]. Propriétés de la dérivation dans $\mathbf{K}[X]$ [n°32 du chapitre 2, énoncé intégral et démonstration de la formule de Leibniz].

Question n°3. — Formule de Taylor exacte dans $\mathbf{K}[X]$ [n°34 du chapitre 2, énoncé et démonstration].

Question n°4. — Critère pour être racine via la divisibilité [n°41 du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Factorisation d'un polynôme connaissant des racines distinctes [n°42 du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Nombre maximal de racines d'un polynôme non nul [n°43 du chapitre 2, énoncé et démonstration].

Question n°5. — Si n est un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments distincts de $\mathbf{K}$, l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array} \right.$$

est bijective [démonstration]. Expression de l'unique antécédent d'un uplet $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ par f en introduisant les polynômes de Lagrange élémentaires [démonstration].

Question n°6. — Déterminant de Vandermonde [n°48 du chapitre 2, énoncé et démonstration polynomiale pour un corps infini].

Question n°7. — Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine [n°55 du chapitre 2, énoncé]. Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine via les dérivées itérées [n°57 du chapitre 2, énoncé et démonstration].

Question n°8. — Description des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ [n°143 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

Question n°9. — Définition du PGCD (resp. PPCM) de deux polynômes non nuls à l'aide des idéaux [n°75 du chapitre 2, énoncé]. Justification de la terminologie PGCD [n°76-(1) du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Théorème de Bézout [n°82 du chapitre 2, énoncé et démonstration via les idéaux].

Question n°10. — Lemme de Gauß [n°88 du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Étant donnés deux polynômes A, B non nuls et premiers entre eux, soufflés par les colleuses/eurs, résolution de l'équation $AU + BV = 1$ d'inconnue $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$.

Question n°11. — Définition d'un polynôme irréductible sur un corps [n°100 du chapitre 2, énoncé]. Irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ [n°108-(1) du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Décomposition en produits d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ [n°109 du chapitre 2, énoncé].

Question n°12. — Irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ [n°108-(2) du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Décomposition en produits d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ [n°112 du chapitre 2, énoncé].

Question n°13. — Si P est un polynôme non nul de $\mathbf{C}[X]$, décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$ dans $\mathbf{C}[X]$ [n°111 du chapitre 2, énoncé et démonstration]. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, soufflée par les colleuses/eurs.

§ 6. Exercices de la banque d'oraux CCINP à étudier

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°84. —

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice CCINP n°85. —

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice CCINP n°87. — Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg(P) \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice CCINP n°89. — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE CCINP N°90. — $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.