

ALGÈBRE GÉNÉRALE

par David Blottière, le 23 septembre 2023 à 08h34

COLLE S3

18/9–22/9

SOMMAIRE

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE	1
§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE	1
§ 3. PROGRAMME	2
§ 4. À VENIR	2
§ 5. QUESTIONS DE COURS	2
§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE D'ORAUX CCINP À ÉTUDIER	3
§ 7. RAPPORT DE COLLE	4

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 15 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soins portés à l'expression orale
7. Technique calculatoire
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 1 — Algèbre générale [PDF]

1. Rappels sur les groupes, les sous-groupes et les morphismes de groupes
2. Sous-groupes additifs de \mathbf{Z}
3. Sous-groupe engendré par une partie
4. Rappels sur la relation de congruence, groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, où $n \in \mathbf{N}$
5. Classification des groupes monogènes
6. Théorème de Lagrange (HP)
7. Ordre d'un élément
8. Rappels sur les anneaux, les sous-anneaux et les morphismes d'anneaux
9. L'anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$
10. Théorème des restes chinois
11. Théorème d'Euler
12. Idéaux d'un anneau commutatif, idéaux de \mathbf{Z} , idéaux de $\mathbf{K}[X]$
13. \mathbf{K} -algèbres, sous- \mathbf{K} -algèbres, morphismes de \mathbf{K} -algèbres

§ 4. À VENIR

Chapitre 2 — Révisions sur les polynômes

Chapitre 3 — Révisions d'algèbre linéaire

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes [n°22 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°2. — Étude de l'application :

$$\rho \left| \begin{array}{ll} (\mathbf{R}, +) & \longrightarrow (\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Morphisme de groupes, surjectivité, noyau [n°27 du chapitre 1, résolution].

QUESTION N°3. — Si $a \in \mathbf{Z}$, propriété remarquable de l'ensemble $a\mathbf{Z}$ des multiples entiers de a [n°35 du chapitre 1, énoncé et démonstration]. Description des sous-groupes additifs de \mathbf{Z} [n°36 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°4. — Définition du sous-groupe engendré par une partie [n°42 du chapitre 1, énoncé]. Description du sous-groupe engendré par une partie [n°44 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°5. — Définition de l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [n°62 du chapitre 1, énoncé]. Structure de groupe additif sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [n°63 du chapitre 1, énoncé et démonstration]. Générateurs du groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ [n°65 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°6. — Classification des groupes monogènes [n°73 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°7. — Théorème de Lagrange (HP) [n°74 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°8. — Définition de l'ordre d'un élément [n°76 du chapitre 1, énoncé]. Propriété de divisibilité de l'ordre d'un élément [n°81 du chapitre 1, énoncé et démonstration]. Cardinal du sous-groupe engendré par un élément d'ordre fini [n°82 du chapitre 1, énoncé et démonstration]. Ordre d'un élément d'un groupe fini [n°83 du chapitre 1, énoncé].

QUESTION N°9. — Structure d'anneau sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [n°106 du chapitre 1, énoncé]. Inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [n°109 du chapitre 1, énoncé]. Critère pour que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit un corps [n°112 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°10. — Théorème des restes chinois [n°118 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°11. — Résolution d'un système de trois congruences simultanées proposé par l'interrogatrice/interrogateur, cf. [n°120 du chapitre 1, résolution].

QUESTION N°12. — Définition de l'indicatrice d'Euler [n°121 du chapitre 1, énoncé]. Théorème d'Euler [n°122 du chapitre 1, énoncé et démonstration]. Petit théorème de Fermat [n°123 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°13. — Calcul de l'indicatrice d'Euler [n°125 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°14. — Définition d'un idéal d'un anneau commutatif [n°128 du chapitre 1, énoncé]. Idéaux et morphismes d'anneaux commutatifs [n°133 du chapitre 1, énoncé et démonstration]. Idéal engendré par un élément [n°135 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°15. — Description des idéaux de \mathbf{Z} [n°139 du chapitre 1, énoncé et brève explication]. Idéaux de \mathbf{Z} et PGCD [n°140 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°16. — Description des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ [n°143 du chapitre 1, énoncé et démonstration].

QUESTION N°17. — Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est un nombre algébrique sur \mathbf{Q} , alors :

$$\mathbf{Q}[\alpha] := \text{Vect}_{\mathbf{Q}}\left(\left(\alpha^k\right)_{k \in \mathbf{N}}\right)$$

est un sous-corps de \mathbf{C} .

QUESTION N°18. — Si E un \mathbf{K} -espace vectoriel et u un endomorphisme de E , alors l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \longrightarrow P(u) := \sum_{n=0}^{+\infty} [P]_n \cdot u^n \end{array} \right.$$

est un morphisme de \mathbf{K} -algèbres. Que dire de son noyau, si E est supposé de dimension finie $n \geq 1$? [n°156 du chapitre 1, résolution].

QUESTION N°19. — Si E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une base \mathcal{B} , alors l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ u \longrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de \mathbf{K} -algèbres [n°159 du chapitre 1, résolution].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE D'ORAUX CCINP À ÉTUDIER

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°86. —

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.

(a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Indication : procéder par récurrence.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

EXERCICE CCINP N°94. —

1. Énoncer le théorème de Bézout dans \mathbb{Z} .
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à \mathbb{Z} .
 - (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans \mathbb{Z} .
 - (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans \mathbb{Z} du système (S).

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille **simple**;
- l'encadrerez en **rouge** avec une règle ;
- en rédigerez une solution **soignée** à l'encre **noire** ou **bleue**

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.