Calcul différentiel

par David Blottière, le 22 mars 2024 à 13h17

Colle S24

25/3–31/3

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle ... 1
§ 2. Éléments de valorisation de la colle ... 1
§ 3. Programme ... 2
§ 4. Questions de cours ... 2
§ 5. Exercices de la banque de sujets du CCINP à étudier par tous ... 3
§ 6. Rapport de colle ... 4

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Chapitre 24 — Calcul différentiel [PDF]

1. Rappels sur la continuité
2. Graphe d'une fonction de deux variables à valeurs réelles
3. Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle
4. Différentiabilité et différentielle en un point
5. Différentiabilité d'une fonction d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$
6. Opérations sur les applications différentiables
7. Applications de classe $\mathscr{C}^1$

§ 4. Questions de cours

Question n°1. — Dérivée selon un vecteur [n°6 du chapitre 18, définition]. Dérivée partielle pour une application définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ [n°9 du chapitre 18, définition]. L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$, mais est discontinue en $(0,0)$ [n°8 du chapitre 18, résolution].

Question n°2. — Notation de Landau $\mathrm{o}(h)$ [n°11 du chapitre 18, définition]. Application différentiable en un point [n°12 du chapitre 18, définition]. Différentiabilité et différentielle de l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array} \right.$$

[n°15 du chapitre 18, résolution].

Question n°3. — Différentiabilité via les applications composantes [n°16 du chapitre 18, énoncé et démonstration]. La différentiabilité en un point entraîne la continuité en ce point [n°17 du chapitre 18, énoncé soigné et démonstration].

Question n°4. — Être différentiable en un point versus admettre des dérivées directionnelles en ce point [n°19 du chapitre 18, énoncé soigné et démonstration]. Différentielle en un point d'une application différentiable en ce point [n°21 du chapitre 18, définition et justification de l'unicité].

Question n°5. — Différentiabilité et différentielle d'une application constante [n°24 du chapitre 18, énoncé]. Différentiabilité et différentielle d'une application linéaire [n°25 du chapitre 18, énoncé]. Différentiabilité et différentielle d'une fonction d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$ [n°27 du chapitre 18, énoncé et démonstration].

Question n°6. — Différentielle d'une application différentiable sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ via les dérivées partielles [n°29 du chapitre 18, énoncé et démonstration]. Matrice Jacobienne [n°31 du chapitre 18, énoncé et démonstration].

Question n°7. — Gradient d'une fonction différentiable d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ [n°32 du chapitre 18, définition]. Lien entre le gradient et la différentielle [n°34 du chapitre 18, énoncé et démonstration]. Interprétation géométrique du gradient [n°35 du chapitre 18, énoncé et démonstration].

Question n°8. — Combinaison linéaire d'applications différentiables [n°36 du chapitre 18, énoncé]. Combinaison d'applications différentiables par une application multilinéaire [n°38 du chapitre 18, énoncé]. Différentiabilité et différentielle de l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^3 \end{array} \right.$$

[n°39 du chapitre 18, résolution].

QUESTION N°9. — Différentielle et différentiabilité d'une composée d'applications différentiables [n°40 du chapitre 18, énoncé et démonstration]. Dérivées partielles d'une composée de deux applications différentiables [n°44 du chapitre 18, énoncé et démonstration].

QUESTION N°10. — Application de classe $\mathscr{C}^1$ [n°47 du chapitre 18, définition]. Critère pour être de classe $\mathscr{C}^1$ [n°48 du chapitre 18, énoncé pour tous et, pour les élèves qui le souhaitent, démonstration pour une fonction de deux variables].

QUESTION N°11. — Dérivée le long d'un arc [n°41 du chapitre 18, énoncé et démonstration]. Intégration d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ le long d'un arc [n°52 du chapitre 18, énoncé et démonstration]. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs [n°525 du chapitre 18, énoncé et démonstration dans le cas où l'ouvert est convexe].

§ 5. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER PAR TOUS

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°33. — On pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

EXERCICE CCINP N°52. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE CCINP N°57. —

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE CCINP N°58. —

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$. Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que : $\exists C \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall (x, y) \in E \times E,\ |B(x, y)| \leqslant C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

§ 6. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.