Probabilités

par David Blottière, le 16 février 2024 à 21h29

Colle S21

19/2–23/2

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Chapitre 15 — Probabilités [PDF]

1. Ensembles finis
2. Quelques situations classiques de dénombrement
3. Ensembles dénombrables
4. Tribus et espaces probabilisables
5. Probabilités et espaces probabilisés
6. Propriétés d'une probabilités
7. Événements négligeables et événements presque sûrs
8. Probabilités conditionnelles
9. Événements indépendants
10. Espaces probabilisés discrets
11. Modélisation d'une suite infinie de lancers de pièce
12. Variable aléatoire et loi d'une telle
13. Couple de variables aléatoires
14. Indépendance des variables aléatoires
15. Loi uniforme
16. Loi de Bernoulli
17. Loi binomiale
18. Loi de Poisson
19. Loi géométrique
20. Espérance
21. Variance, covariance et écart type
22. Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres
23. Fonctions génératrices

§ 4. À venir

Chapitre 16 — Fonctions vectorielles

Chapitre 17 — Équations différentielles linéaires

Chapitre 18 — Calcul différentiel

Chapitre 19 — Optimisation

§ 5. Questions de cours

Question n°1. — Définition d'un ensemble dénombrable [n°41 du chapitre 15, énoncé]. Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables [n°54 du chapitre 15, énoncé formalisé]. Dénombrabilité de $\mathbf{Q}$ [n°54 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Théorème de Cantor. [n°58 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable [n°59 du chapitre 15, début de la démonstration].

Question n°2. — Définition d'une probabilité [n°72 du chapitre 15, énoncé]. Continuité monotone d'un probabilité [n°77 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Probabilité d'une union/intersection dénombrable d'événements [n°78 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

Question n°3. — Formule des probabilités composées [n°88 du chapitre 15, énoncé]. Définition d'un système quasi-complet d'événements [n°90 du chapitre 15, énoncé]. Formule des probabilités totales [n°93 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Formule de Bayes [n°96 du chapitre 15, énoncé].

QUESTION N°4. — Définition de la loi d'une variable aléatoire [n°113 du chapitre 15, énoncé]. Distribution de la loi d'une variable aléatoire [n°114 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Variable aléatoire image [n°121 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

QUESTION N°5. — Loi marginales et loi conjointe [n°127 du chapitre 15, énoncé]. Lemme des coalitions [n°136 du chapitre 15, énoncé général et démonstration pour deux variables aléatoires].

QUESTION N°6. — Définition d'une loi binomiale [n°149 du chapitre 15, énoncé]. Somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli [n°152 du chapitre 15, énoncé et une des démonstrations données en classe]. Situation de reconnaissance d'une loi binomiale [énoncé].

QUESTION N°7. — Définition d'une loi de Poisson [n°154 du chapitre 15, énoncé]. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson [n°157 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson [n°158 du chapitre 15, énoncé et une des démonstrations données en classe].

QUESTION N°8. — Définition d'une loi géométrique [n°159 du chapitre 15, énoncé]. Situation de reconnaissance d'une loi géométrique [énoncé]. Inégalité de Markov [n°204 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

QUESTION N°9. — Définition de l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$ [n°163 du chapitre 15, énoncé]. Espérance d'une d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ via les queues de la loi [n°164 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Application du résultat précédent au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire de loi géométrique [n°166 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

QUESTION N°10. — De l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs complexes [n°166 du chapitre 15, énoncé]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle [n°171 du chapitre 15, énoncé complet et démonstration d'un des résultats au choix de l'interrogatrice/eur].

QUESTION N°11. — Théorème de transfert [n°172 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Définition et structure de l'espace L^1 [n°174, 175 du chapitre 15, énoncé]. Propriétés de l'espérance [n°178 du chapitre 15, énoncé].

QUESTION N°12. — Théorème de domination pour l'espérance [n°177 du chapitre 15, énoncé]. Espérance du produit de deux variables aléatoires L^1 indépendantes [n°179 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

QUESTION N°13. — Définition de l'espace L^2 [n°180 du chapitre 15, énoncé]. Lien entre L^2 et L^1 [n°182 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Produit de deux variables aléatoires L^2 [n°184 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Structure de l'espace L^2 [n°185 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité [n°187 du chapitre 15, énoncé].

QUESTION N°14. — Définition de la variance d'une variable aléatoire L^2 [n°188 du chapitre 15, énoncé]. Formule de König-Huyghens [n°190 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle [n°192 du chapitre 15, énoncé complet et démonstration d'un des résultats au choix de l'interrogatrice/eur].

QUESTION N°15. — Définition de la covariance de deux variables L^2 [n°190 du chapitre 15, énoncé]. Calcul pratique de la covariance [n°200 du chapitre 15, énoncé]. Covariance de deux variables L^2 indépendantes [n°201 du chapitre 15, énoncé]. Variance d'une somme de variables L^2 [n°203 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

QUESTION N°16. — Inégalité de Biénaymé-Tchebychev [n°205 du chapitre 15, énoncé et démonstration]. Loi faible des grands nombres [n°206 du chapitre 15, énoncé et démonstration].

QUESTION N°17. — Définition de la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ et minoration du rayon de convergence d'icelle [n°208, 210 du chapitre 15, énoncé]. Mode de convergence de la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ [n°211 du chapitre 16, énoncé et démonstration]. Définition de la fonction génératrice [n°212 du chapitre 15, énoncé]. Propriétés de la fonction génératrice [n°213 du chapitre 15, énoncé complet et démonstration d'un des résultats au choix de l'interrogatrice/eur].

QUESTION N°18. — La fonction génératrice détermine la loi [n°214 du chapitre 15, énoncé précis]. Calcul d'une fonction génératrice de variable aléatoire suivant une loi usuelle, au choix de l'interrogatrice/eur [n°211 du chapitre 15, calcul]. Fonction génératrice et espérance [n°217 du chapitre 15, énoncé].

QUESTION N°19. — Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes [n°221 du chapitre 15, énoncé général et deux démonstrations]. Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique [une démonstration].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER PAR TOUS

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°101. — Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

EXERCICE CCINP N°107. — On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

EXERCICE CCINP N°109. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE CCINP N°111. — On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in\,]-1,1[$, $\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

§ 7. Rapport de colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.