Endomorphismes des espaces euclidiens

Colle S19

5/2–9/2

par David Blottière, le 2 février 2024 à 15h47

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 14 — Endomorphismes des espaces euclidiens [PDF]

1. Adjoint d'un endomorphisme
2. Matrices orthogonales
3. Groupe orthogonal
4. Groupe spécial orthogonal
5. Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie
6. Isométrie d'un espace euclidien
7. Groupe orthogonal d'un espace euclidien
8. Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien
9. Isométrie vectorielle en dimension 2
10. Réduction des isométries vectorielles
11. Matrices orthogonalement semblables
12. Réduction des matrices orthogonales
13. Réduction d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3
14. Endomorphismes autoadjoints
15. Théorème spectral pour les endomorphismes
16. Théorème spectral pour les matrices
17. Endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs)
18. Matrices symétriques positives (resp. définies positives)

§ 4. À VENIR

Chapitre 15 — Fondements des probabilités

Chapitre 16 — Variables aléatoires discrètes

Chapitre 17 — Fonctions vectorielles

Chapitre 18 — Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Chapitre 19 — Équations différentielles linéaires

Chapitre 20 — Calcul différentiel

Chapitre 21 — Optimisation

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Théorème de Riesz [n°1 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Conséquence du théorème de Riesz [n°2 du chapitre 14, énoncé]. Définition de l'adjoint [n°3 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°2. — Matrice de l'adjoint dans une BON [n°5 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Propriété de stabilité de l'adjoint [n°7 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°3. — Définition d'une matrice orthogonale [n°8 du chapitre 14, énoncé]. Reformulation de la définition de matrice orthogonale [n°9.1 du chapitre 14, énoncé]. Caractérisation des matrices orthogonales par une propriété des lignes (resp. des colonnes) [n°10 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°4. — Définition du groupe orthogonal [n°13 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ [n°16 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°5. — Définition d'une isométrie vectorielle [n°29 du chapitre 14, énoncé]. Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle [n°31 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Définition de la réflexion orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(a)^\perp$, où a est un vecteur unitaire [n°34 du chapitre 14, énoncé de la formule à l'aide d'un produit scalaire, justification].

QUESTION N°6. — Caractérisation des isométries vectorielles [n°36 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°7. — Définition du groupe orthogonal d'un espace euclidien [n°37 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Si E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, les groupes $(\mathrm{O}(E), \circ)$ et $(\mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \times)$ sont (non canoniquement) isomorphes [n°38 du chapitre 14, démonstration].

QUESTION N°8. — Description en extension de $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ [n°44 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Le morphisme de groupes canonique de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ [n°45 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°9. — Si E est un plan euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et θ est un réel, calcul de la matrice de la réflexion orthogonale s d'axe :

$$D := \mathrm{Vect}\,(u := \cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2)\, e_2)$$

dans la base $\mathscr{B}$ et diagonalisation de s dans une base orthonormée de E [n°48 du chapitre 14, étude]. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien [n°49 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°10. — Existence d'une droite ou d'un plan stable [n°53 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Sous-espaces stables par une isométrie vectorielle [n°54 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°11. — Réduction des isométries d'un espace euclidien [n°55 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°12. — Définition de deux matrices orthogonalement semblables [n°56 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases orthonormées [n°58 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°13. — Réduction des matrices orthogonales [n°59 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°14. — Si $\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et est orienté par sa base canonique $\mathscr{B}_0$, étude de l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_0$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[n°62 du chapitre 14, caractérisation géométrique et détermination des éléments caractéristiques de u].

QUESTION N°15. — Définition d'un endomorphisme autoadjoint [n°65 du chapitre 14, énoncé]. Structure de l'ensemble des endomorphismes autoadjoints [n°66 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Caractérisation des projecteurs autoadjoints [n°67 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°16. — Caractérisation des endomorphismes autoadjoints [n°69 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Dimension de l'espace des endomorphismes autoadjoints [n°71 du chapitre 14, énoncé et démonstration en prenant appui sur le lemme 70].

QUESTION N°17. — Sous-espaces stables par un endomorphisme autoadjoint [n°72 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Réduction d'un endomorphisme autoadjoint d'un plan euclidien [n°73 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°18. — Théorème spectral pour les endomorphismes [n°74 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Reformulation du théorème spectral pour les endomorphismes [n°75 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°19. — Théorème spectral pour les matrices [n°76 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Exemple d'une matrice symétrique à coefficients complexes non diagonalisable [n°77 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°20. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ ait une racine carrée dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ [n°79 du chapitre 14, étude par analyse et synthèse]. Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ vérifie $A^p = I_n$, où $p \in \mathbf{N}^*$, alors $A^2 = I_n$ [n°80 du chapitre 14, démonstration].

Question n°21. — Définition d'un endomorphisme autoadjoint positif (resp. défini positif) [n°82 du chapitre 14, énoncé]. Caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs) [n°80 du chapitre 14, énoncé intégral et démonstration dans le cas défini positif].

Question n°22. — Définition d'une matrice symétrique positive (resp. définie positive) [n°85 du chapitre 14, énoncé]. Matrice d'un endomorphisme autoadjoint positif (resp. défini positif) [n°87 du chapitre 14, énoncé intégral et démonstration dans le cas positif]. Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives (resp. définies positives) [n°88 du chapitre 14, énoncé].

Question n°23. — Pour toute matrice $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$:

$$\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n}$$

[n°89 du chapitre 14, démonstration]. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, la matrice $A^\top A$ est orthosemblable à une matrice diagonale dont les coefficients sont réels positifs ou nuls [n°90 du chapitre 14, démonstration].

§ 6. Exercices de la banque de sujets du CCINP à étudier par tous

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°63. — On pose $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

Exercice CCINP n°66. —

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0,+\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}),\ AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice CCINP n°68. — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice CCINP n°78. — Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $\big(x|y\big)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathscr{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

§ 7. Rapport de colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.