Espaces préhilbertiens/euclidiens et endomorphismes

Colle S18

29/1–2/2

par David Blottière, le 26 janvier 2024 à 21h42

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Chapitre 13 — Espaces préhilbertiens [PDF]

1. Produit scalaire
2. Exemples fondamentaux de produits scalaires
3. Norme associée à un produit scalaire
4. Orthogonalité
5. Orthogonal d'une partie
6. Espaces euclidiens et bases orthonormées
7. Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie
8. Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie

Chapitre 14 — Endomorphismes des espaces euclidiens [PDF]

1. Adjoint d'un endomorphisme
2. Matrices orthogonales
3. Groupe orthogonal
4. Groupe spécial orthogonal
5. Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie
6. Isométrie d'un espace euclidien
7. Groupe orthogonal d'un espace euclidien
8. Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien
9. Isométrie vectorielle en dimension 2

§ 4. À venir

Fin du chapitre 14 — Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Chapitre 15 — Fondements des probabilités

Chapitre 16 — Variables aléatoires discrètes

Chapitre 17 — Fonctions vectorielles

Chapitre 18 — Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Chapitre 19 — Équations différentielles linéaires

Chapitre 20 — Calcul différentiel

Chapitre 21 — Optimisation

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ [n°8 du chapitre 13, énoncé et démonstration]. Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel [n°17 du chapitre 13, énoncé].

QUESTION N°2. — Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité [n°14 du chapitre 13, énoncés et démonstrations].

QUESTION N°3. — Inégalité de Minkowski [n°21(a) du chapitre 13, énoncé et démonstration] et cas d'égalité [n°21(b) du chapitre 13, énoncé]. Identité de polarisation [n°23 du chapitre 13, énoncé et démonstration]. Identité du parallélogramme [n°25 du chapitre 13, énoncé, figure, démonstration].

QUESTION N°4. — Propriété d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls [n°32 du chapitre 13, énoncé et démonstration]. Théorème de Pythagore [n°33 du chapitre 13, énoncé et démonstration].

QUESTION N°5. — Définition de l'orthogonal d'une partie [n°42 du chapitre 13, énoncé]. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel engendré [n°45 du chapitre 13, énoncé et démonstration]. Structure de l'orthogonal d'une partie [n°47 du chapitre 13, énoncé et démonstration].

QUESTION N°6. — Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt [n°37 du chapitre 13, énoncé]. Orthonormalisation de la base :

$$(u_1 := (1,0,1), u_2 := (1,1,1), u_3 := (-1,-1,0))$$

de $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel [calcul].

QUESTION N°7. — Coordonnées d'un vecteur dans une BON [n°55 du chapitre 13, énoncé et démonstration]. Expression du produit scalaire dans une BON [n°56 du chapitre 13, énoncé et démonstration]. Expression de la norme dans une BON [n°57 du chapitre 13, énoncé].

QUESTION N°8. — Définition du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie [n°61 du chapitre 13, énoncé, figure, démonstration].

QUESTION N°9. — Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie [n°62 du chapitre 13, énoncé]. Une condition suffisante pour qu'un sous-espace vectoriel et son orthogonal soient supplémentaires [n°64 du chapitre 13, énoncé, figure, démonstration].

QUESTION N°10. — Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide d'un espace préhilbertien [n°67 du chapitre 13, énoncé]. Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien [n°71 du chapitre 13, énoncé, figure, démonstration].

QUESTION N°11. — Théorème de Riesz [n°1 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Conséquence du théorème de Riesz [n°2 du chapitre 14, énoncé]. Définition de l'adjoint [n°3 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°12. — Matrice de l'adjoint dans une BON [n°5 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Propriété de stabilité de l'adjoint [n°7 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°13. — Définition d'une matrice orthogonale [n°8 du chapitre 14, énoncé]. Reformulation de la définition de matrice orthogonale [n°9.1 du chapitre 14, énoncé]. Caractérisation des matrices orthogonales par une propriété des lignes (resp. des colonnes) [n°10 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°14. — Définition du groupe orthogonal [n°13 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ [n°16 du chapitre 14, énoncé].

QUESTION N°15. — Définition d'une isométrie vectorielle [n°29 du chapitre 14, énoncé]. Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle [n°31 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Définition de la réflexion orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(a)^\perp$, où a est un vecteur unitaire [n°34 du chapitre 14, énoncé de la formule à l'aide d'un produit scalaire, justification].

QUESTION N°16. — Caractérisation des isométries vectorielles [n°36 du chapitre 14, énoncé et démonstration].

QUESTION N°17. — Définition du groupe orthogonal d'un espace euclidien [n°37 du chapitre 14, énoncé et démonstration]. Si E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, les groupes $(\mathrm{O}(E), \circ)$ et $(\mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \times)$ sont (non canoniquement) isomorphes [n°38 du chapitre 14, démonstration].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER PAR TOUS

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°39. — On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\,\|$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

EXERCICE CCINP N°76. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\,,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

EXERCICE CCINP N°77. — Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

   (b) Démontrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

EXERCICE CCINP N°80. — Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\left(f \mid g\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

EXERCICE CCINP N°82. — Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\left(A \mid A'\right) = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

§ 7. Rapport de colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.