Séries entières

par David Blottière, le 19 janvier 2024 à 20h49

Colle S17

22–26/1

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Chapitre 12 — Séries entières [PDF]

1. Notion de série entière et problématique
2. Rayon de convergence d'une série entière
3. Calcul pratique du rayon de convergence
4. Somme et produit de deux séries entières
5. Limite uniforme et continuité pour la variable complexe
6. De la continuité de la somme d'une série entière
7. Théorème d'Abel radial
8. Dérivation et intégration d'une série entière
9. Développement d'une fonction en série entière
10. Quelques méthodes et exemples : calculs de DSE par primitivation et dérivation, calculs de DSE à l'aide d'une équation différentielle, calculs de DSE à l'aide d'un produit de Cauchy, applications de la table des DSE usuels
11. Table des développements en séries entières usuels

§ 4. À venir

Chapitre 13 — Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

§ 5. Questions de cours

Question n°1. — Lemme d'Abel [n°2 du chapitre 12, illustration géométrique, énoncé, démonstration]. Définition du rayon de convergence d'une série entière [n°3 du chapitre 12, énoncé].

Question n°2. — Caractérisation du rayon de convergence [n°7 du chapitre 12, illustration géométrique, énoncé, démonstration].

Question n°3. — Détermination du rayon de convergence à partir d'un point atypique [n°13 du chapitre 12, illustration géométrique, énoncé, démonstration].

Question n°4. — Relations de comparaison et rayon de convergence [n°17 du chapitre 12, énoncé, démonstration].

Question n°5. — Somme de deux séries entières [n°28 du chapitre 12, énoncé, démonstration]. Définition du produit de Cauchy de deux séries entières [n°32 du chapitre 12, énoncé]. Résultat sur le produit de Cauchy de deux séries entières [n°33 du chapitre 12, énoncé].

Question n°6. — De la convergence normale d'une série entière [n°38 du chapitre 12, énoncé et démonstration]. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ a rayon de convergence 1, mais elle ne converge pas uniformément sur $D(0,1)$ [n°40 du chapitre 12, démonstration].

Question n°7. — Théorème d'Abel radial [n°44 du chapitre 12, énoncé et, si l'étudiant(e) le souhaite, démonstration]. Valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ [n°45 du chapitre 12, calcul].

Question n°8. — Rayon de convergence des séries dérivées et primitives d'une série entière [n°47 du chapitre 12, énoncé et démonstration].

Question n°9. — Dérivation de la somme d'une série entière [n°48 du chapitre 12, énoncé et démonstration].

Question n°10. — Primitivation terme à terme de la somme d'une série entière [n°51 du chapitre 12, énoncé et démonstration]. DSE de la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ avec rayon de convergence [n°52 du chapitre 12, calcul].

Question n°11. — Coefficients d'une série entière versus nombres dérivées itérés en 0 [n°54 du chapitre 12, énoncé et démonstration]. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon $R \in]0,+\infty[$, rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ [n°26 du chapitre 12, étude].

Question n°12. — Définition d'une fonction développable en série entière [n°56 du chapitre 12, définition]. De l'unicité du développement en série entière [n°58 du chapitre 12, énoncé et démonstration].

Question n°13. — Une condition nécessaire et une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière [n°60 du chapitre 12, énoncé et démonstration].

Question n°14. — Table des développements en série entière usuels avec les rayons de convergence [partie 11 du chapitre 12, énoncé sans la fonction arcsinus et démonstration pour sinus].

Les deux questions suivantes ne figurent pas au programme des colles du lundi 22 janvier.

Question n°15. — Si $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, alors la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière [n°65 du chapitre 12, démonstration à l'aide d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 et d'un raisonnement par analyse et synthèse].

Question n°16. — Rayons de convergence et calculs des sommes des séries entières :

$$S_1(x) := \sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad S_2(x) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)} \qquad S_3(x) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!} x^n$$

[n°68 du chapitre 12, calculs].

§ 6. Exercices de la banque de sujets du CCINP à étudier par tous

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°2. — On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice CCINP n°20. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
   (c) $\sum \cos n z^n$.

EXERCICE CCINP N°21. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

EXERCICE CCINP N°22. —

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

$$f \,:\, x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)\,.$$

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

EXERCICE CCINP N°24. —

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1,\ \ f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0,\ \ f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0\,.$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.