Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre

par David Blottière, le 12 janvier 2024 à 11h03

Colle S16

15–19/1

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 11 — Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre [PDF]

1. Théorème de convergence dominée : versions discrète et continue
2. Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue
3. Intégrales à paramètre : problématique et exemples
4. Continuité d'une intégrale à paramètre
5. Dérivée d'une intégrale à paramètre
6. Dérivées d'ordre supérieur d'une intégrale à paramètre
7. Deux exercices classiques : calcul de la Gaussienne avec une équation différentielle, étude approfondie de la fonction Γ

§ 4. À VENIR

Chapitre 12 — Séries entières

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Théorème de convergence dominée [n°1 du chapitre 11, énoncé]. L'identité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

en justifiant l'existence des termes en jeu en cours d'étude [n°13 du chapitre 11, démonstration].

QUESTION N°2. — Version continue du théorème de convergence dominée [n°9 du chapitre 11, énoncé et démonstration].

QUESTION N°3. — Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue [n°10 du chapitre 11, énoncé]. Limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x}\, dx$ quand n tend vers $+\infty$ [n°4 du chapitre 11, étude].

QUESTION N°4. — Les identités :

$$\forall\, a > 0, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\ln(2)}{3}$ [n°7 du chapitre 11, démonstration et calcul].

QUESTION N°5. — Critères de continuité pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale [n°18, 19 du chapitre 11, énoncé]. Continuité de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\, dt \end{array} \right.$$

[n°22 du chapitre 11, démonstration].

QUESTION N°6. — Critères de dérivabilité pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale [n°25 du chapitre 11, énoncé et démonstration].

QUESTION N°7. — Critères $\mathscr{C}^k$ pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale [n°31 du chapitre 11, énoncé]. Dérivabilité et expression intégrale de la dérivée de la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\, dt \end{array} \right.$$

sur $\mathbf{R}_+$ [n°30 du chapitre 11, étude].

QUESTION N°8. — La fonction :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, expressions intégrales de ses dérivées itérées et relation fonctionnelle [n°35 du chapitre 11, étude].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER PAR TOUS

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°19. —

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$.
2. Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

EXERCICE CCINP N°25. —

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\,\mathrm{d}t$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE CCINP N°26. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

EXERCICE CCINP N°30. —

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. **(a)** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .

EXERCICE CCINP N°50. — On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.