SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

par David Blottière, le 24 décembre 2023 à 05h29

COLLE S15

8–12/1

SOMMAIRE

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

Étudiants de MPI + Robin G. – Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* – Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 9 — Familles sommables [PDF]

1. Ordre et borne supérieure dans $[0, +\infty]$
2. Familles sommables de nombres réels positifs
3. Familles sommables de nombres complexes

Chapitre 10 — Suites et séries de fonctions [PDF]

1. Convergence simple d'une suite de fonctions
2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions
3. La convergence simple n'est pas associée à une norme (HP)
4. Convergence simple d'une série de fonctions
5. Convergence uniforme d'une série de fonctions
6. Convergence normale d'une série de fonctions bornées
7. Des limites d'une limite uniforme de suite de fonctions
8. Intégration d'une limite uniforme sur un segment
9. Dérivation de suites/séries de fonctions : critères $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^k$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ et $\mathscr{C}^\infty$
10. Approximation uniforme par des fonctions en escalier
11. Théorème de Weierstraß

§ 4. À VENIR

Chapitre 11 — Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Définition d'une famille sommable de nombres complexes [n°44 du chapitre 9, énoncé]. Famille sommable de nombres complexes indexée par **N** [n°47 du chapitre 9, énoncé]. Définition de la somme d'une famille sommable de nombres réels [n°52 du chapitre 9, énoncé spécialisé au cas réel]. Approximation de la somme d'une famille sommable de nombres réels [n°53 du chapitre 9, énoncé et démonstration spécialisés au cas réel].

QUESTION N°2. — Théorème de domination pour les familles sommables [n°50 du chapitre 9, énoncé et démonstration]. Somme d'une famille sommable de nombres complexes et suite exhaustive [n°56 du chapitre 9, énoncé]. Linéarité de la somme d'une famille sommable de nombres complexes [n°57 du chapitre 9, énoncé et démonstration].

QUESTION N°3. — Théorème de sommation par paquets : cas complexe [n°58 du chapitre 9, énoncé]. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, démonstration de l'identité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\, z^n \qquad \left[\text{si } n \in \mathbf{N}^*,\ d(n) \text{ est le nombre de diviseurs positifs de } n\right]$$

en justifiant l'existence des deux termes en cours d'étude.

QUESTION N°4. — Théorème de Fubini : cas complexe [n°59 du chapitre 9, énoncé]. Pour tout nombre complexe a tel que $|a| < 1$, démonstration de l'identité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n-1}}{1-a^{2n-1}}$$

en justifiant l'existence des deux termes en cours d'étude.

QUESTION N°5. — Produit de Cauchy de deux séries de nombres complexes absolument convergentes [n°64 du chapitre 9, énoncé]. Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe [n°67 du chapitre 9, énoncé et justification de la convergence de la série]. Propriété algébrique de l'exponentielle [n°68 du chapitre 9, énoncé et démonstration].

QUESTION N°6. — Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions [n°1 du chapitre 10, énoncé]. Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions [n°5 du chapitre 10, énoncé]. Écritures formelles des deux précédentes définitions l'une sous l'autre [n°6 du chapitre 10, énoncés et explication orale de ce qui distingue les deux concepts]. Expression de la convergence uniforme d'une suite de fonctions à l'aide de la norme $||\cdot||_\infty$ [n°8 du chapitre 10, énoncé et figure]. La suite de fonctions :

$$\left(f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right.\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1[$ [démonstration].

QUESTION N°7. — La suite de fonctions :

$$\left(f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \end{array}\right.\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$ [n°11 du chapitre 10, énoncé et démonstration]. Un critère de non-convergence uniforme [n°12 du chapitre 10, énoncé et démonstration].

QUESTION N°8. — Définition de la convergence simple d'une série de fonctions [n°33 du chapitre 10, énoncé]. Définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions [n°35 du chapitre 10, énoncé]. Expression de la convergence uniforme d'une série de fonctions à l'aide des restes [n°36 du chapitre 10, énoncé]. Convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ où, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n \end{array}\right.$$

et calcul de sa somme [n°34 du chapitre 10, démonstration].

QUESTION N°9. — Définition de la convergence normale d'une suite de fonctions bornées [n°40 du chapitre 10, énoncé]. Convergence normale versus convergence simple [n°45 du chapitre 10, énoncé et démonstration]. Convergence normale versus convergence uniforme [n°46 du chapitre 10, énoncé et démonstration]. Exemple d'une série de fonctions convergeant uniformément, mais non-normalement [n°46 du chapitre 10, énoncé et justification].

QUESTION N°10. — Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une suite de fonctions [n°51 du chapitre 10, énoncé et démonstration]. Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une série de fonctions [n°52 du chapitre 10, énoncé et explication de la bascule des suites aux séries].

QUESTION N°11. — Théorème de la double limite en un point du bord l'intervalle pour une suite de fonctions [n°57 du chapitre 10, énoncé]. Théorème de la double limite en un point du bord l'intervalle pour une série de fonctions [n°57 du chapitre 10, énoncé]. Limite de la fonction ζ en $+\infty$ [n°61 du chapitre 10, étude].

QUESTION N°12. — Intégration d'une limite d'une suite de fonctions sur un segment [n°62 du chapitre 10, énoncé et démonstration]. Intégration terme à terme d'une somme de série de fonctions sur un segment [n°63 du chapitre 10, énoncé et explication de la bascule des suites aux séries].

QUESTION N°13. — Primitivation d'une limite uniforme de suites de fonctions [n°67 du chapitre 10, énoncé et démonstration].

QUESTION N°14. — Si $r\in[0,1[$ et $t\in\mathbf{R}$, existence et valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r^n\, n\cos(nt)$ [n°69 du chapitre 10, étude et calcul].

QUESTION N°15. — Critère $\mathscr{C}^1$ pour les suites de fonctions [n°70 du chapitre 10, énoncé et démonstration].

QUESTION N°16. — Si $k\in\mathbf{N}^*$, critère $\mathscr{C}^k$ pour les séries de fonctions [n°75 du chapitre 10, énoncé]. Pour tout $r\in[0,1[$, pour tout $t\in\mathbf{R}$, démonstration de l'identité :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{r\sin(t)}{1-r\cos(t)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n\,\frac{\sin(nt)}{n}$$

en justifiant la convergence de la série en cours d'étude [n°73 du chapitre 10, justification et calcul].

QUESTION N°17. — Critère $\mathscr{C}^\infty$ pour les séries de fonctions [n°78 du chapitre 10, énoncé]. La fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et expressions de ses dérivées itérées comme sommes de séries convergentes [n°79 du chapitre 10, étude].

QUESTION N°18. — Approximation uniforme par des fonctions en escalier [n°80 du chapitre 10, énoncé général et démonstration dans le cas continu].

QUESTION N°19. — Lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction continue par morceaux sur un segment [n°82 du chapitre 10, énoncé et démonstration]. Lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction de $L^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ [n°83 du chapitre 10, énoncé et démonstration].

QUESTION N°20. — Théorème de Weierstraß [n°84 du chapitre 10, énoncé]. Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur **R** [n°88 du chapitre 10, énoncé et démonstration].

§ 6. EXERCICES DE LA BANQUE DE SUJETS DU CCINP À ÉTUDIER PAR TOUS

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

EXERCICE CCINP N°8. —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

EXERCICE CCINP N°9. —

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

EXERCICE CCINP N°10. — On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE CCINP N°11. —

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

EXERCICE CCINP N°12. —

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in[0;1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

EXERCICE CCINP N°16. — On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ \ u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

EXERCICE CCINP N°17. — Soit $A\subset\mathbb{C}$ et $\left(f_n\right)$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } \left(f_n\right) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, x\in[0;+\infty[$, $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

EXERCICE CCINP N°48. — $C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f\in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $\left(P_n f\right)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.