Séries numériques et familles sommables

Colle S13

12/12–15/12

par David Blottière, le 9 décembre 2023 à 09h32

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI + Robin G. − Aurélien M.

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI* − Robin G. + Aurélien M.

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (8 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

☞ Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. Programme

Développements limités

1. Table des développements limités usuels [PDF]
2. Exemples d'applications [PDF]

Chapitre 8 — Séries numériques et vectorielles [PDF]

1. Rappels sur les séries numériques
2. Technique de comparaison série-intégrale
3. Règle de d'Alembert pour les séries à termes réels strictement positifs
4. Sommation des relations de comparaison
5. Séries vectorielles

Chapitre 9 — Familles sommables [PDF]

1. Ordre et borne supérieure dans $[0,+\infty]$.
2. Familles sommables de réels positifs.

§ 4. À venir

Fin du chapitre 9 — Familles sommables

3. Familles sommables de nombres complexes

Chapitre 10 — Suites et séries de fonctions

Chapitre 11 — Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

§ 5. Questions de cours

Question n°1. — Table des développements limités usuels [énoncé et détermination d'un développement asymptotique à trois termes au choix de l'interrogatrice/teur].

Question n°2. — Convergence et somme de la série harmonique alternée [n°3 du chapitre 8, énoncé]. Théorème sur les séries géométriques [n°6 du chapitre 8, énoncé et démonstration].

Question n°3. — Critère de convergence des séries à termes réels positifs [n°16 du chapitre 8, énoncé et démonstration]. Théorème de domination pour les séries à termes réels positifs [n°18 du chapitre 8, énoncé et démonstration].

Question n°4. — Une série absolument convergente est convergente [n°20 du chapitre 8, énoncé et démonstration]. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Question n°5. — Théorème de comparaison [n°22 du chapitre 8, énoncé et démonstration]. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

Question n°6. — Critère des séries alternées avec majoration du reste [n°29 du chapitre 8, énoncé et démonstration]. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Question n°7. — Théorème de comparaison série-intégrale [n°33 du chapitre 8, énoncé et démonstration]. Critère de Riemann pour les séries [n°34 du chapitre 8, énoncé].

Question n°8. — Pour tout $\alpha>1$, détermination d'un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Nature de la série de terme général $\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{\ln(n)}$, où $x \in \mathbf{R}$.

Question n°9. — Règle de d'Alembert [n°39 du chapitre 8, énoncé et démonstration dans le cas $\ell < 1$]. Théorème de Cesàro [n°47 du chapitre 8, énoncé].

Question n°10. — Théorème de sommation des o pour les séries [n°46 du chapitre 8, énoncé]. Théorème de sommation des équivalents pour les séries [n°51 du chapitre 8, énoncé et démonstration].

Question n°11. — Théorème sur les séries absolument convergentes des espaces vectoriels de dimension finie [n°64 du chapitre 8, énoncé et démonstration].

Question n°12. — Définition d'une famille sommable de réels positifs [n°5 du chapitre 9, énoncé]. Somme d'une famille de réels positifs indexée par $\mathbf{N}$ [n°6 du chapitre 9, énoncé et démonstration].

Question n°13. — Permutation des termes d'une somme de familles de réels positifs [n°15 du chapitre 9, énoncé et démonstration]. Définition d'une suite exhaustive de parties d'un ensemble [n°23 du chapitre 9, énoncé, diagramme de Venn]. Critère de sommabilité via une suite exhaustive dans le cas positif [n°28 du chapitre 9, énoncé et démonstration].

Question n°14. — Définition d'une partition d'un ensemble [n°31 du chapitre 9, énoncé, diagramme de Venn]. Théorème de sommation par paquets dans le cas positif [n°35 du chapitre 9, énoncé]. Sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(n+m)^3}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ et expression de la somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann [n°39 du chapitre 9, résolution].

Question n°15. — Théorème de Fubini dans le cas positif [n°41 du chapitre 9, énoncé et démonstration]. Convergence et somme de la série $\sum_{p\geqslant 2}\big(\zeta(p)-1\big)$ [n°43 du chapitre 9, résolution].

§ 6. Exercices de la banque de sujets du CCINP à étudier par tous

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°5. —

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$. En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) Cas $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice CCINP n°6. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}$?

Exercice CCINP n°7. —

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

EXERCICE CCINP N°46. — On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

EXERCICE CCINP N°61. — On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Pour $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \displaystyle\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{i,j}\right|$.

1. Prouver que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\|A\|\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\displaystyle\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

   Est-elle convergente ?

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.