

INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

par David Blottière, le 30 novembre 2023 à 05h36

COLLE S12

4/12-8/12

SOMMAIRE

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE	1
§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE	1
§ 3. PROGRAMME	2
§ 4. À VENIR	2
§ 5. QUESTIONS DE COURS	2
§ 6. LISTE DES INTÉGRALES DONT LA NATURE EST À ÉTUDIER EN AMONT	3
§ 7. RAPPORT DE COLLE	3

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (**7 points, 12 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Étude de la nature d'une intégrale généralisée, piochée dans la liste fournie au paragraphe 6 (**5 points, 8 minutes maximum**) : la rédaction débutera toujours par l'analyse de l'intégrale

introduction de l'intégrande, précision de l'intervalle d'intégration, mention de la régularité

les théorèmes appliqués seront clairement indiqués (cas échéant) et les solutions seront exposées avec dynamisme.

3. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**8 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. ÉLÉMENTS DE VALORISATION DE LA COLLE

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soins portés à l'expression orale
7. Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. Écoute des conseils/consignes

§ 3. PROGRAMME

Chapitre 7 — Intégration sur un intervalle quelconque [PDF]

1. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle
2. Études asymptotiques d'intégrales partielles
3. Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$
4. Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$
5. Du comportement asymptotique d'une fonction intégrable en $+\infty$
6. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque
7. Intégrabilité sur un intervalle quelconque
8. Intégration des relations de comparaison

§ 4. À VENIR

Chapitre 8 — Révisions et compléments sur les séries numériques

Chapitre 9 — Dénombrabilité et familles sommables

Chapitre 10 — Suites et séries de fonctions

Chapitre 11 — Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

§ 5. QUESTIONS DE COURS

QUESTION N°1. — Définition d'une intégrale convergente sur $[a, b]$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$ [n°47-1 du chapitre 7, énoncé]. Convergence et valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ [n°23 du chapitre 7, étude].

QUESTION N°2. — Définition d'une intégrale convergente sur $]a, b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ [n°47-2 du chapitre 7, énoncé]. Convergence et valeur de $\int_0^1 \ln(t) dt$ [n°56 du chapitre 7, étude].

QUESTION N°3. — Intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$, sur $]0, 1]$, sur $]a, b]$, sur $[a, b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$ [n°25, 56, 83 du chapitre 7, énoncé intégral et démonstration pour $[1, +\infty[$].

QUESTION N°4. — Propriété de la queue d'une intégrale convergente en $+\infty$ [n°26 du chapitre 7, énoncé et démonstration]. Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$, où $a \in \mathbf{R}$ [n°25 du chapitre 7, énoncé et démonstration].

QUESTION N°5. — Propriétés des intégrales généralisées [n°53 du chapitre 7, énoncé intégral et démonstration de la propriété de séparation quand l'intervalle d'intégration est ouvert].

QUESTION N°6. — Critère pour qu'une intégrale de fonction positive sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbf{R}$, converge [n°27 du chapitre 7, énoncé et démonstration]. Théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbf{R}$ [n°28 du chapitre 7, énoncé et démonstration].

QUESTION N°7. — Définition d'une intégrale absolument convergente sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbf{R}$ [n°32 du chapitre 7, énoncé]. Propriété remarquable des intégrales absolument convergentes sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbf{R}$ [n°34 du chapitre 7, énoncé et démonstration].

QUESTION N°8. — L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, mais non absolument convergente [n°35 du chapitre 7, démonstration].

QUESTION N°9. — Théorème de comparaison sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbf{R}$ [n°36 du chapitre 7, énoncé et démonstration].

Nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} dt$ [n°40 du chapitre 7, étude].

QUESTION N°10. — Exemple graphique d'une fonction intégrale sur $[0, +\infty[$, qui n'a pas 0 pour limite en $+\infty$ [Partie 5 du chapitre 7, schéma annoté, explication de l'intégrabilité, justification du comportement asymptotique en $+\infty$]. Si $f \in L^1([0, +\infty[, \mathbf{R})$ possède une limite réelle ℓ en $+\infty$, alors $\ell = 0$ [n°45 du chapitre 7, démonstration].

QUESTION N°11. — Le faux problème de convergence en un point réel [n°57 du chapitre 7, énoncé]. Convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ [n°58 du chapitre 7, démonstration]. Inégalité triangulaire pour une fonction de $L^1(I, \mathbf{R})$, où I est un intervalle d'intérieur non vide [n°77 du chapitre 7, énoncé et démonstration].

QUESTION N°12. — Théorème d'intégration par parties [n°62 du chapitre 7, énoncé]. Convergence et valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ [n°65 du chapitre 7, étude].

QUESTION N°13. — Théorème de changement de variable [n°66 du chapitre 7, énoncé]. Existence et nullité de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ [n°69 du chapitre 7, démonstration].

QUESTION N°14. — Les intégrales $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ convergent et ont pour valeur commune $-\frac{\pi \ln(2)}{2}$ [n°81 du chapitre 7, démonstration].

QUESTION N°15. — Intégration d'une relation de négligeabilité [n°86 du chapitre 7, énoncé des résultats de la colonne de gauche]. Intégration d'un équivalent [n°88 du chapitre 7, énoncé et démonstration des résultats de la colonne de gauche]. Équivalent de $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t} + \ln(t)} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

§ 6. LISTE DES INTÉGRALES DONT LA NATURE EST À ÉTUDIER EN AMONT

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u^2+1)}{u^2+1} du$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+|\sin(t)|)}{1+t} dt$$

$$(6) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^x} dx$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$

$$(9) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} dt$$

$$(10) \int_0^1 \frac{\ln(\sin(t))}{t^{4/3}} dt$$

$$(11) \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$$

$$(12) \int_0^1 e^{1/\sqrt{t}} dt$$

$$(13) \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{3/2}} dt$$

$$(14) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

$$(15) \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

§ 7. RAPPORT DE COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille **simple**;
- l'encadrerez en **rouge** avec une règle;
- en rédigerez une solution **soignée** à l'encre **noire** ou **bleue**

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.