Espaces vectoriels normés II

par David Blottière, le 20 novembre 2023 à 10h51

Colle S9

20/11–24/11

Sommaire

§ 1. Déroulement de la colle

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (7 points, 12 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (7 points, 12 minutes maximum) : ils auront été intensément travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (6 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. Éléments de valorisation de la colle

Votre note, délivrée à la fin de votre colle par votre interrogatrice/teur, prendra en compte les critères suivants.

1. Maîtrise du cours
2. Initiatives pertinentes
3. Qualité de l'argumentation (ni trop elliptique, ni trop ampoulée)
4. Présentation du tableau
5. Compréhension profonde des concepts
6. Soin porté à l'expression orale
7. <u>Technique calculatoire : rigueur, méthode, rapidité</u>
8. Structures des raisonnements
9. Rigueur de l'expression écrite
10. Émergence d'une modélisation (cas échéant)
11. Capacité à rebondir sur une indication (sagacité)
12. Souci d'explication de la démarche
13. Dynamisme (à ne pas confondre avec empressement)
14. <u>Écoute des conseils/consignes</u>

§ 3. Programme

Chapitre 6 — Espaces vectoriels normés [PDF]

1. Normes sur un espace vectoriel
2. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
3. Comparaison de normes
4. Topologie d'un espace vectoriel normé
5. Étude locale d'une application, continuité
6. Applications linéaires et multilinéaires continues
7. Parties compactes d'un espace vectoriel normé
8. Applications continues sur une partie compacte
9. Connexité par arcs
10. Espaces vectoriels normés de dimension finie

§ 4. À venir

Chapitre 7 — Intégrales généralisées

Chapitre 8 — Révisions et compléments sur les séries numériques

Chapitre 9 — Dénombrabilité et familles sommables

Chapitre 10 — Suites et séries de fonctions

Chapitre 11 — Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

§ 5. Questions de cours

Question n°1. — Caractérisation des applications linéaires continues [n°148 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

Question n°2. — Norme subordonnée d'une application linéaire continue et norme sur l'espace des applications linéaires continues. [n°157 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

Question n°3. — Majoration par la norme subordonnée [n°164 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Sous-multiplicativité d'une norme subordonnée [n°165 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

Question n°4. — Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires [n°168 du chapitre 6, énoncé]. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est continue [n°167 du chapitre 6, énoncé précisé et démonstration]. Continuité du déterminant [n°169 du chapitre 6, énoncé précisé et démonstration].

Question n°5. — Définition d'une partie compacte [n°170 et 171 du chapitre 6, énoncé]. Un compact est fermé et borné [n°172 du chapitre 6, démonstration]. La réciproque est fausse [n°174 (1) du chapitre 6, contre-exemple].

Question n°6. — Propriété topologique d'un fermé d'un compact [n°175 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Produit d'un nombre fini de compacts [n°177 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

Question n°7. — Caractérisation des compacts de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$ [n°178 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. La compacité de la sphère unité entraîne celle de la boule unité fermée [n°179 du chapitre 6, énoncé précisé et démonstration].

Question n°8. — Image continue d'un compact [n°182 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Théorème des bornes atteintes [n°183 du chapitre 6, énoncé précisé et démonstration].

Question n°9. — Définition d'un arc tracé sur une partie joignant deux points [n°186 du chapitre 6, énoncé]. Définition d'une partie connexe par arcs [n°188 du chapitre 6, énoncé]. Un convexe est connexe par arcs [n°191 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

Question n°10. — Toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ peut être reliée à I_n par un arc continu tracé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ donc … [n°190 du chapitre 6, démonstration].

Question n°11. — Caractérisation des connexes par arcs de $\mathbf{R}$ [n°195 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. Image continue d'un connexe par arcs [n°196 du chapitre 6, énoncé et démonstration]. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs [n°200 du chapitre 6, démonstration].

Question n°12. — Synthèse sur les espaces vectoriels normés de dimensions finie : propriété remarquable des normes, propriétés topologiques intrinsèques, caractérisation des compacts, régularité des applications linéaires [n°203, 204, 206, 210 du chapitre 6, énoncés].

Question n°13. — Convergence d'une suite dans un espace de dimension finie [n°205 du chapitre 6, démonstration]. Dans un espace vectoriel normé (non nécessairement de dimension finie), tout sous-espace vectoriel de dimension finie est … [n°208 du chapitre 6, énoncé et démonstration].

Question n°14. — Norme subordonnée d'un endomorphisme de $(\mathbf{R}^n, || \cdot ||_\infty)$ [n°161 du chapitre 6, calcul]. $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est compact [n°207 du chapitre 6, démonstration]. $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. [n°198 du chapitre 6, démonstration].

§ 6. Exercices de la banque de sujets du CCINP à étudier

Étudier les exercices ci-dessous vous permettra de faire vos gammes avant votre colle. Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°13. —

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|| \, ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ de E par : $||P||_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \; / \; ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice CCINP n°36. — Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $|| \, ||_E$ (respectivement $|| \, ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \left\| f(x) \right\|_F \leqslant k \|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice CCINP n°38. —

1. On se place sur $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall f \in E, ||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall x \in [0,1], g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.

   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.
   Calculer $|||u|||$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.
   Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

Exercice CCINP n°39. — On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice CCINP n°54. — Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

   (a) Prouver que $||\,.\,||$ est une norme sur E.

   (b) Prouver que : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

   (c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

§ 7. Rapport de colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'interrogatrice/teur. Vous :

- collerez cet énoncé sur une feuille simple ;
- l'encadrerez en rouge avec une règle :
- en rédigerez une solution soignée à l'encre noire ou bleue

que vous me remettrez sans faute à la fin du cours du mercredi suivant votre colle.