SUITES NUMÉRIQUES

par David Blottière, le 20 août 2023 à 21h44

RÉVISIONS 1

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit. »

Aristote

SOMMAIRE

§ 1. COURS

On commencera par une étude minutieuse du polycopié de cours sur les suites réelles [PDF]. Il faudra être en mesure

- d'énoncer précisément et formellement les définitions;
- d'énoncer et de démontrer les propositions et théorèmes;
- de résoudre les exemples d'applications directes.

On veillera à se forger une image mentale des concepts, à l'aide d'un dessin (e.g. pour la définition de suite convergente).

De même, on pourra s'exercer à dégager les idées essentielles d'une démonstration au moyen d'un graphique (e.g. pour le théorème de convergence monotone).

Votre compréhension s'en trouvera renforcée et vous disposerez d'une aide précieuse pour appréhender des questions nouvelles, qui pourra supporter votre intuition.

Pour un exemple de représentation de la notion de suite convergente et d'applications possibles, vous pouvez visionner la vidéo [YouTube].

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 2. VRAI-FAUX

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1 **UN CORRIGÉ**

L'assertion

$$n^2+2n+2^n+\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$$

est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2 **UN CORRIGÉ**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. L'assertion

$$(u_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3 **UN CORRIGÉ**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. L'assertion

$$u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4 **UN CORRIGÉ**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. L'assertion

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5 **UN CORRIGÉ**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]a, b[$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et on note ℓ sa limite. L'assertion

$$\ell \in]a, b[$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6 **UN CORRIGÉ**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. L'assertion

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7 **UN CORRIGÉ**

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'assertion

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 8 **UN CORRIGÉ**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. L'assertion

$$\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(v_n)$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 9 **UN CORRIGÉ**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels strictement positifs, telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. L'assertion

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$$

est-elle nécessairement vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

§ 3. Étude d'une suite définie de manière implicite

Énoncé de l'exercice 10 | Un corrigé

Q1. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'équation :

$$x + \ln(x) = n$$

d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet une unique solution. Cette dernière sera notée x_n dans ce qui suit.

Q2. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

Q3. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Q4. — Démontrer :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Q5. — Démontrer :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

Q6. — Démontrer :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

□

§ 4. Caractérisation des suites réelles non majorées

Énoncé de l'exercice 11 | Un corrigé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

Q1. — On suppose qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui diverge vers $+\infty$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée.

Q2. — On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée. Démontrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui diverge vers $+\infty$.

Q3. — Synthétiser les résultats des deux premières questions en une seule phrase.

□

§ 5. Valeurs d'adhérence d'une suite réelle ∗

Énoncé de l'exercice 12 | Un corrigé

Soit $a := (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels bornée.
On appelle valeur d'adhérence de a tout nombre réel qui est limite d'une suite extraite de a.

Q1. — Soit ℓ un nombre réel. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) ℓ est une valeur d'adhérence de la suite a.

(b) $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geqslant N, \quad |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

(c) $\forall \varepsilon > 0, \quad \{n \in \mathbf{N} : |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon\}$ est une partie infinie de $\mathbf{N}$.

Q2. — Déterminer l'ensemble $\mathscr{A}$ des valeurs d'adhérence de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q3. — On suppose de plus que :

$$a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démontrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ valeurs d'adhérence de la suite a est un segment.

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 ÉNONCÉ

Vrai. D'après les croissances comparées :

$$n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(2^n\right) \qquad 2n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(2^n\right) \qquad \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(2^n\right)$$

et donc

$$n^2+2n+2^n+\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} 2^n+\mathrm{o}\left(2^n\right)$$

ce qui équivaut à $n^2+2n+2^n+\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 **ÉNONCÉ**

Faux. Un contre-exemple est donné par la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} > 0$. En effet, en remarquant que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(u_n)^n = \exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

et en appliquant $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on démontre :

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Avec la continuité de la fonction exponentielle en 1, il vient

$$(u_n)^n = \exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

■

Un corrigé de l'exercice 3 Énoncé

Faux. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n+1$ et $v_n = n$. En effet :

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

mais :

$$u_n - v_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4

ÉNONCÉ

Faux. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. En effet :

$$u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 - 0 = 0$$

mais :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2+1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

■

Un corrigé de l'exercice 5 — Énoncé

Faux. Un contre-exemple est donné par $a = 0$, $b = 2$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 < \frac{1}{n+1} < 2$$

mais :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \notin]0,2[.$$

■

Remarque — D'après le théorème de passage à la limite dans une inégalité large, on a cependant $\ell \in [a,b]$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 **ÉNONCÉ**

Faux. Un contre-exemple est donné par la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$. En effet :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

■

Remarque — Si $q \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = q^n$, livre également un contre-exemple.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 **ÉNONCÉ**

Faux. Si f est la fonction partie entière et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais

$$f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq f(1) = 1 .$$

■

Remarque — L'assertion est vraie, si l'on suppose de plus la fonction f continue en ℓ.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8 ÉNONCÉ

Faux. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n+1$ et $v_n = n$. En effet :

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

mais :

$$\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = \frac{e^n \cdot e^1}{e^n} = e \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

■

Remarque — On ne composera donc jamais un équivalent par la fonction exponentielle.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9 ÉNONCÉ

Faux. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} > 0$ et $v_n = 1 + \dfrac{2}{n+1} > 0$. En effet :

$$\frac{u_n}{v_n} = \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1} = 1$$

mais :

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{2}{n+1}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

■

Remarque — On ne composera donc jamais un équivalent par la fonction logarithme.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10 **ÉNONCÉ**

Q1. — On introduit la fonction f_n définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x+\ln(x). \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable (donc continue) sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$:

$$f'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0.$$

D'après le critère différentiel de stricte monotonie, la fonction f est dont strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\,.$$

Du théorème de la bijection, nous déduisons alors que la fonction f est bijective. L'élément $n \in \mathbf{R}$ possède un et un seul antécédent par f, que l'on note x_n.

■

Q2. — Soit $n \in \mathbf{N}$. De

$$f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$$

et de la **stricte** croissance de la fonction f, nous déduisons $x_{n+1} > x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc strictement croissante.

■

Q3. — D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$. Nous allons démontrer qu'elle n'est pas convergente, en raisonnant par l'absurde, et nous en déduirons :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\,.$$

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et notons $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \qquad 0 < x_0 < x_n.$$

Par passage à la limite dans une inégalité, il vient :

$$0 < x_0 \leqslant \ell.$$

Ainsi $\ell > 0$. Par continuité de la fonction f sur $]0,+\infty[$, nous en déduisons que :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell) \in \mathbf{R}$$

ce qui est contradictoire avec :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad f(x_n) = n.$$

■

Q4. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$x_n + \ln(x_n) = n.$$

Comme $x_n \neq 0$, nous déduisons :

$$1+\frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n}\,.$$

Par croissances comparées :

$$\frac{\ln(X)}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$$

Par la question 3 et la composition de limites, nous déduisons :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis :

$$\frac{n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi $n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

■

Q5. — Il s'agit de démontrer :

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

i.e. :

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}\,.$$

Nous savons d'après la question précédente que :

$$\frac{x_n}{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il nous faut à présent préciser la vitesse de convergence de $\left(\frac{x_n}{n}-1\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers 0.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $x_n + \ln(x_n) = n$:

$$(\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 = -\frac{\ln(x_n)}{n}\,.$$

Nous observons :

$$\ln(n) = \ln(x_n + \ln(x_n)) = \ln(x_n) + \ln\left(1+\frac{\ln(x_n)}{x_n}\right).$$

Nous avons déjà établi :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et nous en déduisons, en considérant le quotient :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(x_n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{\ln(x_n)}{x_n}\right)}{\ln(x_n)}$$

que :

$$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(x_n)\ .$$

D'après cet équivalent et $(\star)$:

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$$

ce qu'il fallait établir.

■

Q6. — Démontrer Il s'agit de démontrer :

$$\frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

i.e. :

$$\frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En reprenant les calculs effectués à la question précédente, il vient :

$$(\star\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{n}\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(x_n)}{x_n}\right).$$

Comme :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+X) \underset{X\to0}{\sim} X$$

il vient :

$$\ln\left(1+\frac{\ln(x_n)}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x_n)}{x_n}\ .$$

Comme nous avons établi :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad \text{et} \qquad \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

nous pouvons affirmer :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}\ .$$

De cet équivalent et de $(\star\star)$, nous déduisons :

$$(\star\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

ce qu'il fallait établir.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11 **ÉNONCÉ**

Q1. — Par hypothèse, il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ majorée. Alors il existe $M \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$. En particulier :

$$(\star) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \leqslant M.$$

Comme $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$(\star\star) \qquad \forall\, n \geqslant N, \quad u_{\varphi(n)} \geqslant M+1\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$M+1 \leqslant u_{\varphi(N)} \leqslant M.$$

d'où une contradiction.

■

Q2. — Nous devons construire une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante. Nous souhaitons de plus que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Pour cela nous allons construire $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ par récurrence.

• Initialisation. Comme 0 n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $0 < u_{n_0}$. Nous posons $\varphi(0) := n_0$, de sorte que $u_{\varphi(0)} > 0$.

• Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits des entiers naturels $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ tels que :

(a) $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$;

(b) $u_{\varphi(0)} > 0, u_{\varphi(1)} > 1, \ldots, u_{\varphi(n)} > n$.

Si la suite $(u_p)_{p\geqslant\varphi(n)+1}$ était majorée par $M \in \mathbf{R}$, alors la suite $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ serait également majorée par :

$$\max(u_0, \ldots, u_{\varphi(n)}, M).$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. La suite $(u_p)_{p\geqslant\varphi(n)+1}$ n'est donc pas majorée. En particulier $n+1$ de majore pas cette suite. Ainsi existe-t-il $p \geqslant \varphi(n)+1$ tel que $u_p > n+1$. Nous posons $\varphi(n+1) := p$, de sorte que $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1 > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} > n+1$. Ainsi :

(a) $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$;

— ((b)] $u_{\varphi(0)} > 0, u_{\varphi(1)} > 1, \ldots, u_{\varphi(n)} > n$, $u_{\varphi(n+1)} > n+1$.

• Conclusion. Nous avons ainsi construit, par récurrence, une application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array} \right.$$

qui est strictement croissante et qui vérifie de plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$. Par lemme de minoration, nous en déduisons $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

■

Q3. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée si et seulement si elle possède une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

■

Un corrigé de l'exercice 12 **Énoncé**

Q1. — Nous démontrons successivement $(a) \Longrightarrow (b)$, $(b) \Longrightarrow (c)$ et $(c) \Longrightarrow (a)$.

• $(a) \Longrightarrow (b)$. Supposons que ℓ est valeur d'adhérence de la suite a. Alors, il existe une application $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$(\star) \qquad a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}$. D'après $(\star)$, il existe p_0 tel que, pour tout $p \geqslant p_0$:

$$\left| a_{\varphi(p)} - \ell \right| \leqslant \varepsilon.$$

En posant :

$$n := \varphi\left(\max\{N, p_0\}\right)$$

il vient :

$$n \geqslant \varphi(N) \geqslant N \qquad \text{et} \qquad |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

• $(b) \Longrightarrow (c)$. Supposons (b), i.e. :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, N \in \mathbf{N}, \quad \exists\, n \geqslant N, \quad |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous démontrons que $A_\varepsilon := \{n \in \mathbf{N} : |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon\}$ est une partie infinie de $\mathbf{N}$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que A_ε est finie.

— Si A_ε est vide, alors il n'existe aucun entier $n \geqslant 0$ tel que $|a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, d'où une contradiction avec (b).

— Supposons désormais A_ε non vide. Alors l'entier :

$$N := \max(A_\varepsilon) + 1$$

est bien défini (conséquence de la propriété de bon ordre pour $\mathbf{N}$). Comme, pour tout $n \geqslant N$, n n'appartient pas à A_ε (i.e. $|a_n - \ell| > \varepsilon$), nous obtenons une contradiction avec (b).

• $(c) \Longrightarrow (a)$. Supposons que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad A_\varepsilon := \{n \in \mathbf{N} : |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon\} \text{ est une partie infinie de } \mathbf{N}.$$

Nous devons construire une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. une application $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante. Nous souhaitons de plus que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Pour cela nous allons construire $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ par récurrence.

— Initialisation. Comme A_1 est infini, cet ensemble est non vide. Ainsi existe-t-il $n_0 \in A_1$. Nous posons $\varphi(0) := n_0$, de sorte que :

$$\left| a_{\varphi(0)} - \ell \right| \leqslant 1 = \frac{1}{0+1}.$$

— Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits des entiers naturels $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ tels que :

(a) $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$;

(b) $\forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad \left| a_{\varphi(p)} - \ell \right| \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.

Comme $A_{\frac{1}{n+2}}$ est une partie infinie de $\mathbf{N}$, elle n'est pas incluse dans la partie finie $[\![0, \varphi(n)+1]\!]$ de $\mathbf{N}$. Il existe donc $p \geqslant \varphi(n)+1$ appartenant à $A_{\frac{1}{n+2}}$. Nous posons $\varphi(n+1) := p$ de sorte que $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1 > \varphi(n)$ et :

$$\left| a_{\varphi(n+1)} - \ell \right| \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi :

(a) $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$;

(b) $\forall\, p \in [\![0, n+1]\!], \quad \left| a_{\varphi(p)} - \ell \right| \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.

— Conclusion. Nous avons ainsi construit, par récurrence, une application :

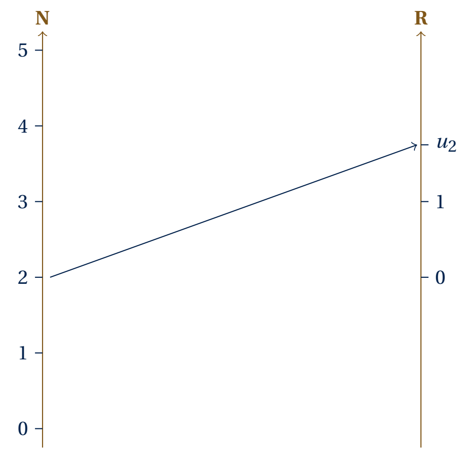
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array} \right.$$

qui est strictement croissante et qui vérifie de plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\ell - \frac{1}{n+1} \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant \ell + \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. ∎

Remarque — On se propose d'imager la notion de valeur d'adhérence de suite. Représentons nous la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme des archers placés sur l'échelle des entiers, qui tirent des flèches sur l'axe réel. Alors un réel ℓ est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si une infinité d'archers tire des flèches infiniment proches de ℓ.



Q2. — Nous démontrons que l'ensemble $\mathscr{A}$ des valeurs d'adhérence de la suite $\left(a_n := (-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est $\{-1,1\}$, en raisonnant par double inclusion. Nous commençons par l'inclusion « facile ».

$\boxed{\supset}$ Comme :

$$a_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \qquad \text{et} \qquad a_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

les nombres -1 et 1 sont valeurs d'adhérence de la suite $\left(a_n := (-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. $\{-1,1\} \subset \mathscr{A}$.
$\boxed{\subset}$ Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $\left(a_n := (-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Nous démontrons que $\ell = -1$ ou $\ell = 1$, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc $\ell \neq -1$ et $\ell \neq 1$, de sorte que :

$$\delta := \min\{|\ell+1|, |\ell-1|\} \qquad \left[\text{plus petite des distances entre } \ell \text{ et } -1 \text{ et entre } \ell \text{ et } 1\right]$$

est strictement positif. D'après la question 1, l'ensemble :

$$\left\{ n \in \mathbf{N} : |a_n - \ell| \leqslant \frac{\delta}{2} \right\}$$

est infini et, en particulier, non vide. Nous pouvons donc considérer un entier n tel que $|a_n - \ell| \leqslant \dfrac{\delta}{2}$.

— Si n est pair alors :

$$\delta \leqslant |\ell - 1| = |1-\ell| = |a_n - \ell| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

— Si n est impair alors :

$$\delta \leqslant |1+\ell| = |-1-\ell| = |a_n - \ell| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Dans tous les cas, il vient $\delta \leqslant \dfrac{\delta}{2}$, puis, en multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{\delta} > 0$, $1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Contradiction.

■

Q3. — Nous décomposons le raisonnement en trois parties et démontrons que :

(a) $\mathscr{A}$ est une partie bornée de $\mathbf{R}$;
(b) $\mathscr{A}$ est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$;
(c) $\inf(\mathscr{A})$ et $\sup(\mathscr{A})$ appartiennent à $\mathscr{A}$;

ce qui livrera que $\mathscr{A}$ est un segment de $\mathbf{R}$.

• $\mathscr{A}$ **est une partie bornée de R.** Soient m un minorant de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et M un majorant de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Considérons une valeur d'adhérence ℓ de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors, il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Comme m minore la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et M majore la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il vient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad m \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant M.$$

Par passage à la limite dans une inégalité large, nous obtenons $m \leqslant \ell \leqslant M$. L'ensemble $\mathscr{A}$ est donc borné.

• $\mathscr{A}$ **est un intervalle non vide de R.** D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, l'ensemble $\mathscr{A}$ est non vide. Démontrons que c'est un intervalle.
Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et soit ℓ_3 un nombre réel tel que $\ell_1 < \ell_3 < \ell_2$. Nous démontrons que ℓ_3 est une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, en raisonnant par l'absurde, grâce à la question 1.
Supposons donc qu'il existe :

$$0 < \varepsilon < \frac{\ell_3 - \ell_1}{2} \qquad \left[\text{on peut supposer } \varepsilon > 0 \text{ aussi petit que désiré}\right]$$

tel que l'ensemble :

$$\{n \in \mathbf{N} : |a_n - \ell_3| \leqslant \varepsilon\}$$

est fini. Ainsi existe-t-il $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$(\star) \qquad \forall n \geqslant N_1, \qquad a_n < \ell_3 - \varepsilon \quad \text{ou} \quad a_n > \ell_3 + \varepsilon.$$

Comme :

$$a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$(\star\star) \qquad \forall n \geqslant N_2, \quad |a_{n+1} - a_n| \leqslant \varepsilon.$$

Comme ℓ_1 est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe un entier non nul $n_1 \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ tel que :

$$\left|a_{n_1} - \ell_1\right| \leqslant \varepsilon \qquad [\text{question } 1].$$

Nous allons démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad a_n \leqslant \ell_3 - \varepsilon.$$

— *Initialisation.* De $\left|a_{n_1} - \ell_1\right| \leqslant \varepsilon$, nous déduisons :

$$a_{n_1} \leqslant \ell_1 + \varepsilon < \frac{\ell_1 + \ell_3}{2} < \ell_3 - \varepsilon.$$

— Hérédité. Soit $n \geqslant n_1$ tel que $a_n \leqslant \ell_3 - \varepsilon$. Comme $n \geqslant N_2$:

$$a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_n \leqslant \varepsilon + a_n \leqslant \ell_3 \leqslant \ell_3 + \varepsilon \qquad [\text{cf. } (\star\star)]\,.$$

Comme $n+1 \geqslant N_1$, nous en déduisons :

$$a_{n+1} < \ell_3 - \varepsilon \qquad [\text{cf. } (\star)]$$

et *a fortiori* $a_{n+1} \leqslant \ell_3 - \varepsilon$.

Comme :

$$\forall\, n \geqslant n_1, \quad a_n \leqslant \ell_3 - \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$$

l'ensemble :

$$\{n \in \mathbf{N} \,:\, |a_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon\}$$

est inclus dans $[\![0, n_1 - 1]\!]$ donc fini, ce qui contredit que ℓ_2 est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'après la question 1.

• $\inf(\mathscr{A})$ et $\sup(\mathscr{A})$ appartiennent à $\mathscr{A}$. Nous démontrons $s := \sup(\mathscr{A})$ appartient à $\mathscr{A}$, le raisonnement pour la borne inférieure étant analogue. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}$. Comme $s - \varepsilon$ ne majore pas $\mathscr{A}$, il existe $\ell \in \mathscr{A}$ tel que :

$$s - \varepsilon < \ell \leqslant s.$$

Comme ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\ell - (s-\varepsilon) > 0$, il existe $n \geqslant N$ tel que :

$$|a_n - \ell| \leqslant \ell - (s - \varepsilon) \qquad \big[\text{question } 1\big]\,.$$

Nous en déduisons :

$$s - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant 2\cdot\ell - (s-\varepsilon) \leqslant 2\cdot s - (s-\varepsilon) = s + \varepsilon.$$

i.e. $|s - a_n| \leqslant \varepsilon$. D'après la question 1, s est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

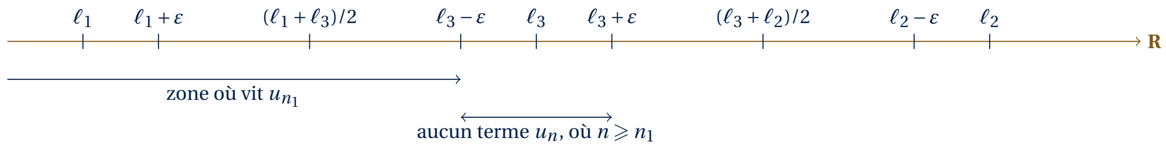
■

Remarque — Le point délicat est de démontrer que $\mathscr{A}$ est un intervalle. Nous revenons sur notre preuve, en donnant une heuristique géométrique. Nous avons établi l'existence d'un rang n_1 tel que :

(a) $u_{n_1} \leqslant \ell_3 - \varepsilon$;

(b) à partir du rang n_1, les accroissements entre u_n et u_{n+1} sont majorés par ε, i.e. pour passer de u_n à u_{n+1} on fait un saut de longueur inférieur à ε sur l'axe réel ;

(c) à partir du rang n_1, aucun des termes de la suite ne se trouve dans la zone $[\ell_3 - \varepsilon, \ell_3 + \varepsilon]$



Le no man's land $[\ell_3 - \varepsilon, \ell_3 + \varepsilon]$ et les accroissements inférieurs à ε obligent tous les u_n, où $n \geqslant n_1$, à rester à gauche de $\ell_3 - \varepsilon$. Il ne peut donc pas y avoir une infinité de termes de la suite dans $[\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon]$.