Polynômes en une indéterminée

Révisions 2

par David Blottière, le 21 août 2023 à 21h19

« La logique est l'hygiène des mathématiques. »

André Weil

Sommaire

§ 1. Préambule

Les polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ s'écrivent d'une unique manière sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où n est un entier naturel, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbf{K}$ et $a_n \neq 0$. L'objet X est appelé indéterminée.

Dans un premier temps, on rappelle la construction de l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, en expliquant soigneusement qui est l'indéterminée X.

Un polynôme est ontologiquement la suite de ses coefficients et ne doit pas être confondu avec la fonction polynomiale qu'on lui associe canoniquement.

On construit des opérations (multiplication par un scalaire, addition, multiplication) sur $\mathbf{K}[X]$ et on établit avec rigueur quelques unes de leurs propriétés, grâce à des manipulations sur des sommes finies qui sont intéressantes par ailleurs.

On dispose d'une notion de degré, de coefficient dominant et de division euclidienne qui s'avèrent être précieux dans l'étude de $\mathbf{K}[X]$.

Un des résultats essentiels est le théorème de d'Alembert-Gauß : tout polynôme à coefficients complexes de degré au moins 1 possède une racine complexe.

Nous verrons, cette année, que les polynômes permettent d'étudier la réduction des matrices, e.g. de savoir si une matrice carrée à coefficients dans $\mathbf{K}$ est semblable à une matrice diagonale.

§ 2. Rappels sur la construction de $\mathbf{K}[X]$

Notation — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Approche retenue — La construction décrite ci-dessous repose sur l'idée suivante : un polynôme peut être identifié avec la suite de ses coefficients.

Ensemble $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles d'éléments de $\mathbf{K}$ — On note $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ le sous-ensemble de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, formé des suites d'éléments de $\mathbf{K}$, qui sont nulles à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\mathbf{K}^{(\mathbf{N})} := \left\{(a_k)_{k\in\mathbf{N}} : \exists n\in\mathbf{N} \quad \forall k \geqslant n \quad a_k = 0\right\}.$$

Il est parfois commode d'écrire un élément $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ sous la forme $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots)$.

Trois opérations $\cdot, +, \times$ sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ et structure de $\mathbf{K}$-algèbre — Si A est un élément de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ alors on définit, pour tout $k\in\mathbf{N}$, $[A]_k$ comme étant le terme d'indice k de la suite A. Ainsi, si $A=(a_k)_{k\in\mathbf{N}}\in\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ alors pour tout $k\in\mathbf{N}$, $[A]_k = a_k$.

Soient $A\in\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ et $B\in\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$. On leur associe deux éléments de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $A+B$ et $A\times B$, définis par, pour tout $k\in\mathbf{N}$:

$$[A+B]_k := [A]_k + [B]_k \qquad \text{et} \qquad [A\times B]_k = \sum_{i=0}^{k} [A]_i\,[B]_{k-i}\,.$$

Si de plus $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit l'élément $\lambda.A$ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ par, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$[\lambda \cdot A]_k := \lambda\,[A]_k\,.$$

On démontre que les suites $\lambda.A$, $A+B$ et $A \times B$ sont nulles à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\lambda.A \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \tag{1}$$
$$A+B \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \tag{2}$$
$$A \times B \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}\,. \tag{3}$$

Pour une démonstration des propriétés (1)–(3), on pourra visionner la vidéo [YouTube] (14 minutes).

Ainsi, pouvons nous considérer trois opérations définies sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$:

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ (\lambda, A) & \longmapsto & \lambda \cdot A \end{array} \right. \quad \text{(multiplication par un scalaire)} \qquad + \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ (A, B) & \longmapsto & A+B \end{array} \right. \quad \text{(addition)}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array} \right. \quad \text{(multiplication)}$$

telles que $\left(\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, \cdot, +\right)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\left(\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, +, \times\right)$ un anneau commutatif et :

$$\forall\,(\lambda, A, B) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, \qquad \lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)\,.$$

On dit alors que $\left(\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, \cdot, +, \times\right)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre commutative (nous reviendrons sur cette structure dans l'année). En particulier, la multiplication $\times$ est associative, i.e. :

$$\forall\,(A, B, C) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, \qquad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \tag{4}$$

et commutative, i.e. :

$$\forall\,(A, B) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, \qquad A \times B = B \times A\,. \tag{5}$$

Pour une démonstration des propriétés (4) et (5), on pourra visionner la vidéo [YouTube] (25 minutes).

L'INDÉTERMINÉE X ET SES PUISSANCES — On distingue plusieurs éléments remarquables dans $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$:

- la suite nulle $0_{\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} = (0, \ldots, 0, \ldots)$ qui est le neutre de l'addition $+$;
- la suite $1_{\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} = (\delta_{0,k})_{k \in \mathbf{N}} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ qui est le neutre de la multiplication $\times$;
- l'élément $X = (\delta_{1,k})_{k \in \mathbf{N}} = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ qui va nous permettre d'écrire sous une forme commode tous les éléments de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$.

Dans ce qui précède $\delta_{?,!}$ désigne le symbole de Kronecker.

Si $n \in \mathbf{N}$ et si $A \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, alors on pose :

$$A^n := \begin{cases} 1_{\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

On vérifie que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad X^n = \left(\delta_{n,k}\right)_{k \in \mathbf{N}} = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{terme d'indice } n}, 0, \ldots, 0, \ldots\right). \tag{6}$$

Pour une démonstration de la propriété (6), qui légitime la notation puissance déjà utilisée par la passé, on pourra visionner la vidéo [YouTube] (12 minutes).

NOTATION USUELLE DES POLYNÔMES — Considérons à présent un élément

$$A = (a_k)_{k \in \mathbf{N}} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}\,.$$

D'après les définitions des opérations $\cdot$ et $+$ sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$:

$$A = a_0 \cdot (1, 0, \ldots, 0, \ldots) + a_1 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) + \ldots + a_n \cdot \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{terme d'indice } n}, 0, \ldots, 0, \ldots\right).$$

En appliquant à présent (6), il vient :

$$A = a_0 \cdot X^0 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k . X^k$$

somme finie que l'on convient d'écrire plutôt $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k$. Le symbole $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ jouit des mêmes propriétés de linéarité que le symbole de sommation usuel et ne met en jeu aucune convergence (il s'agit d'une somme finie ici).

Nous avons donc démontré que tout élément A de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ s'écrit sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k$, où $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Cette écriture est par ailleurs unique, car les coefficients qui apparaissent sont précisément les termes de la suite d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. A. Pour cette raison, on choisit de désigner $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ par $\mathbf{K}[X]$.

SYNTHÈSE DE LA CONSTRUCTION DE $\mathbf{K}[X]$ — Un élement A de $\mathbf{K}[X]$, appelé polynôme en une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$, s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot X^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Les opérations sur $\mathbf{K}[X]$ se réécrivent alors, de manière habituelle, comme suit :

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times\mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ (\lambda, A) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda\,[A]_k\,X^k \end{array} \right. \quad \text{(multiplication par un scalaire)} \qquad + \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X]\times\mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ (A,B) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \left([A]_k + [B]_k\right) X^k \end{array} \right. \quad \text{(addition)}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X]\times\mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ (A,B) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} [A]_i\,[B]_{k-i} \right) X^k \end{array} \right. \quad \text{(multiplication)}$$

et $(\mathbf{K}[X], \cdot, +, \times)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre commutative.

PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE LA $\mathbf{K}$-ALGÈBRE $(\mathbf{K}[X], +, \cdot, \times)$ — Soient A une $\mathbf{K}$-algèbre et $a \in A$. Alors :

> il existe un unique morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres $f : \mathbf{K}[X] \longrightarrow A$ tel que $f(X) = a$.

En cours d'année, nous reviendrons sur cette propriété, qui est l'essence de $\mathbf{K}[X]$. Remarquons simplement que f est l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \cdot a^k. \end{array} \right.$$

et laissons au soin du lecteur de vérifier, avec toute la rigueur requise, que l'application ci-dessus est bien un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres.

TROIS OUTILS ADDITIONNELS SUR $\mathbf{K}[X]$ — La $\mathbf{K}$-algèbre commutative $\mathbf{K}[X]$ est munie de trois outils suplémentaires :

- une application « degré » :

$$\deg \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{N}\cup\{-\infty\} \\ A & \longmapsto & \begin{cases} -\infty & \text{si } A = 0 \\ \max\{k\in\mathbf{N} \,:\, [A]_k \neq 0\} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

- une application « coefficient dominant » :

$$\operatorname{dom} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X]\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbf{K}^* \\ A & \longmapsto & [A]_{\deg(A)} \end{array} \right.$$

- une division euclidienne : pour tout $(A,B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X]\setminus\{0\})$ il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbf{K}[X]\times\mathbf{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)\ .$$

Soulignons que l'on dispose d'un algorithme (à connaître) pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme par un polynôme non nul.

L'anneau $\mathbf{K}[X]$ présente des analogies fortes avec l'anneau $\mathbf{Z}$. Par exemple, les éléments irréductibles de $\mathbf{K}[X]$ sont des analogues des nombres premiers et l'on dispose d'un analogue polynomial du théorème fondamental de l'arithmétique.

§ 3. COURS

On commencera par une étude minutieuse :

- du polycopié de cours [PDF] sur les polynômes;
- les parties 2 et 3 du polycopié de cours [PDF] portant sur l'arithmétique des polynômes.

Il faudra être en mesure :

- d'énoncer précisément et formellement les définitions;
- d'énoncer et de démontrer les propositions et théorèmes;
- de résoudre les exemples d'applications directes.

Ce travail sur le cours est fondamental.

§ 4. VRAI-FAUX

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1 **UN CORRIGÉ**

L'assertion

$$\forall (A,B) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad \deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$$

est-elle vraie? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

Énoncé de l'exercice 2 **Un corrigé**

L'assertion
$$\forall\,(A,B)\in\mathbf{K}[X]^2,\quad \deg(A+B)=\max\{\deg(A),\deg(B)\}$$
est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

Énoncé de l'exercice 3 **Un corrigé**

L'assertion
$$\forall\,P\in\mathbf{K}[X],\quad \deg(P')=\deg(P)-1$$
où $P':=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,[P]_k\,X^{k-1}$ est le polynôme dérivé de P, est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

Énoncé de l'exercice 4 **Un corrigé**

L'assertion
$$X^2+X+1 \text{ divise } X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$$
est-elle vraie ? Justifier la réponse donnée.

□

Énoncé de l'exercice 5 **Un corrigé**

L'assertion

Un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.

est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

Énoncé de l'exercice 6 **Un corrigé**

L'assertion

Si A et B sont polynômes de $\mathbf{C}[X]$ sans racine commune dans $\mathbf{C}$, alors ils sont premiers entre eux.

est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

Énoncé de l'exercice 7 **Un corrigé**

L'assertion

Si A et B sont polynômes de $\mathbf{R}[X]$ sans racine commune dans $\mathbf{R}$, alors ils sont premiers entre eux.

est-elle vraie ? Si « oui », démontrer le résultat. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

□

§ 5. Racines de l'unité

Énoncé de l'exercice 8 **Un corrigé**

Soit $n\geq 2$ un nombre entier.

Q1. — Factoriser X^n-1 en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

Q2. — En déduire les valeurs de
$$S_n:=\sum_{\zeta\in\mathbb{U}_n}\zeta \qquad\text{et}\qquad P_n:=\prod_{\zeta\in\mathbb{U}_n}\zeta$$
où $\mathbb{U}_n$ est le sous-groupe de $(\mathbf{C}^*,\times)$ formé par les racines n-ièmes de l'unité.

□

§ 6. Polynômes à valeurs rationnelles sur les rationnels

Énoncé de l'exercice 9 — **Un corrigé**

Soit P un polynôme non nul de $\mathbf{C}[X]$ dont le degré est noté n. On suppose que :

$$\forall\, x \in \mathbf{Q}, \quad P(x) \in \mathbf{Q}.$$

Démontrer que $P \in \mathbf{Q}[X]$, i.e. que tous les coefficients de P sont rationnels.

□

§ 7. Polynômes de Legendre

Énoncé de l'exercice 10 — **Un corrigé**

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Q1. — Déterminer L_0, L_1 et L_2.

Q2. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

Q3. — Démontrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q4. — Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ tels que :

$$U_n' = \lambda (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)\,.$$

Q5. — Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)\,.$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

Q6. — En déduire que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $]-1,1[$.

□

§ 8. Somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$ $*$

Énoncé de l'exercice 11 — **Un corrigé**

Un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$ si :

$$\exists\, (A,B) \in \mathbf{R}[X]^2, \qquad P = A^2 + B^2\,.$$

Q1. — Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme constant P de $\mathbf{R}[X]$ soit somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

Q2. — Démontrer qu'un polynôme P de degré 1 de $\mathbf{R}[X]$ n'est pas somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

Q3. — Démontrer qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ unitaire et de degré 2 est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si $\Delta(P) \leqslant 0$.

Q4. — Soient P_1 et P_2 des polynômes de $\mathbf{R}[X]$, qui sont sommes de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$. Démontrer que leur produit $P_1 P_2$ est également somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

Q5. — Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Démontrer P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \qquad P(x) \geqslant 0\,.$$

□

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 **ÉNONCÉ**

Vraie.

Si $A=0$ ou $B=0$ alors $AB=0$ et l'identité à démontrer s'écrit $-\infty=-\infty$. Elle est donc vraie.

Supposons donc que $A\neq 0$ et $B\neq 0$, introduisons les degrés respectifs $a\in\mathbf{N}$ et $b\in\mathbf{N}$ de A et B et considérons $n>a+b$.

$$[AB]_n := \sum_{k=0}^{n}[A]_k[B]_{n-k} = \sum_{k=0}^{a}[A]_k[B]_{n-k} + \sum_{k=a+1}^{n}[A]_k[B]_{n-k}\,.$$

Pour tout $k\geqslant a+1$, $[A]_k=0$ et donc la deuxième somme est nulle. Si $k\leqslant a$, alors $n-k>b$ et donc $[B]_{n-k}=0$. La première somme est donc nulle également. Ainsi, pour tout $n>a+b$, $[AB]_n=0$.

Nous observons

$$[AB]_{a+b} := \sum_{k=0}^{a+b}[A]_k[B]_{a+b-k} = \sum_{k=0}^{a-1}[A]_k[B]_{a+b-k} + [A]_a[B]_b + \sum_{k=a+1}^{a+b}[A]_k[B]_{a+b-k}\,.$$

- Si $k\leqslant a-1$ alors $a+b-k\geqslant b+1$ et donc $[B]_{a+b-k}=0$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{a-1}[A]_k[B]_{a+b-k}=0$.
- Si $k\geqslant a+1$ alors $[A]_k=0$ et donc $\displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b}[A]_k[B]_{a+b-k}=0$.

Nous en déduisons $[AB]_{a+b}=[A]_a[B]_b\neq 0$.

D'après ce qui précède $AB\neq 0$ et :

$$\deg(AB) := \max\{k\in\mathbf{N}\;:\;[AB]_k\neq 0\} = a+b = \deg(A)+\deg(B)\,.$$

■

Remarque — Nous avons également établi

$$\mathrm{dom}(AB)=\mathrm{dom}(A)\ \mathrm{dom}(B).$$

Un corrigé de l'exercice 2 **Énoncé**

Faux. Un contre-exemple est donné par $A = X^2 + X + 1$ et $B = -X^2 + 1$.

■

Remarque — Il est cependant vrai que :

$$\forall (A, B) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad \deg(A+B) \leqslant \max\{\deg(A), \deg(B)\}.$$

En effet, pour tout $k > \max\{\deg(A), \deg(B)\}$,

$$[A+B]_k = [A]_k + [B]_k = 0 + 0 = 0$$

car $k > \deg(A)$ et $k > \deg(B)$. De plus :

$$\forall (A, B) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad \deg(A) \neq \deg(B) \quad \Longrightarrow \quad \deg(A+B) = \max\{\deg(A), \deg(B)\}.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3

ÉNONCÉ

Faux. Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme constant non nul (i.e. un polynôme de degré 0), alors $P' = 0$ et :

$$-\infty = \deg\left(P'\right) \neq \deg(P) - 1 = -1.$$

■

Remarque — Il est cependant vrai que :

$$\forall P \in \mathbf{K}[X], \quad \deg(P) \geqslant 1 \implies \deg\left(P'\right) = \deg(P) - 1.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 ÉNONCÉ

Vrai. En posant la division euclidienne de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^2 + X + 1$ on obtient un reste nul. ■

Remarque — Le quotient de la division euclidienne de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^2 + X + 1$ égale $X^3 + 1$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 **ÉNONCÉ**

Vrai. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré n impair. Quitte à diviser P par son coefficient dominant, nous pouvons supposer P unitaire, i.e. de coefficient dominant égal à 1. Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & P(x). \end{array} \right.$$

Étant polynomiale, elle est continue sur l'intervalle $\mathbf{R}$. De plus comme P est de degré impair et unitaire

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty\,.$$

D'après la définition de la limite, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in [b, +\infty[, \quad f(x) \geqslant 0$$

et

$$\forall\, x \in]-\infty, a], \quad f(x) \leqslant 0\,.$$

Ainsi $f(a)f(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x_0 (entre a et b) tel que $f(x_0) = 0$. Le polynôme P possède donc une racine réelle.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6

ÉNONCÉ

Raisonnons par contraposée. Supposons donc que A et B ne sont pas premiers entre eux et démontrons qu'ils ont une racine commune dans $\mathbf{C}$.

Comme A et B ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD, noté D, est un polynôme unitaire de degré supérieur ou égal à 1. Comme D divise A et B, il existe $Q_A \in \mathbf{C}[X]$ et $Q_B \in \mathbf{C}[X]$ tels que :

$$A = Q_A D \quad \text{et} \quad B = Q_B D.$$

Comme le polynôme D n'est pas constant, il possède une racine α dans $\mathbf{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauß. Ainsi :

$$A(\alpha) = Q_A(\alpha)D(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad B(\alpha) = Q_B(\alpha)D(\alpha) = 0\,.$$

Le nombre complexe α est donc une racine commune à A et B.

■

Un corrigé de l'exercice 7 **Énoncé**

Faux. Un contre-exemple est donné par $A = (X^2+1)X$ et $B = (X^2+1)(X+1)$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8 **ÉNONCÉ**

Soit $n \geq 2$ un nombre entier.

Q1. — Les racines complexes de $X^n - 1$ sont les éléments de :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ : \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Comme les éléments $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux-à-deux distincts, nous en déduisons qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que :

$$X^n - 1 = Q \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right).$$

Par analyse des degrés, nous obtenons $\deg(Q) = 0$. Par analyse des coefficients dominants, il vient $Q = 1$. Donc :

$$(\star) \qquad X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right).$$

Comme les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, l'identité $(\star)$ est la décomposition de $X^n - 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

■

Q2. — D'après la question 1, S_n est la somme des racines complexes de $X^n - 1$ et P_n est le produit des racines complexes de $X^n - 1$.

Comme $X^n - 1$ est scindé sur $\mathbf{C}$ et de degré n, la somme de ses racines est l'opposé de son coefficient de degré $n-1$ et le produit de ses racines égale son coefficient constant multiplié par $(-1)^n$. Il s'agit d'un cas particulier des formules de Viète.

Nous en déduisons :

$$S_n := \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0 \qquad \text{et} \qquad P_n := \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = (-1)^{n+1}.$$

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9 **ÉNONCÉ**

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Nous considérons le polynôme L_k défini par :

$$L_k := \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{X - \ell}{k - \ell}$$

qui est un polynôme interpolateur de Lagrange élémentaire, pour les points $0, 1, \ldots, n$. Comme L_k est un produit de polynômes à coefficients rationnels : Nous observons que :

$$L_k \in \mathbf{Q}[X].$$

D'après le théorème d'interpolation de Lagrange :

$$(\star) \qquad P = \sum_{k=0}^{n} P(k) \cdot L_k \,.$$

Par hypothèse, les nombres $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ sont rationnels. Comme $\mathbf{Q}[X]$ est un sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$, l'identité $(\star)$ livre que P est à coefficients rationnels

■

Remarque — Dans la solution ci-dessus, nous avons choisi d'interpoler aux points $0, 1, \ldots, n$, mais nous aurions tout aussi bien pu interpoler en $n+1$ autres nombres rationnels deux à deux distincts.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10 ÉNONCÉ

Q1. — $U_0 = 1$ et $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = 1$.

$U_1 = (X^2-1)$ et $L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}(2X) = X$.

$U_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}(4X^3 - 4X)' = \dfrac{1}{8}(12X^2 - 4) = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

■

Q2. — Démontrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(HR_k) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \deg(()\,U_n^{(k)}) & = & 2n-k \\ \mathrm{dom}\left(U_n^{(k)}\right) & = & \prod_{i=0}^{k-1}(2n-i) \end{array} \right.$$

Initialisation. — $U_n^{(0)} = U_n = (X^2-1)^n = X^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^2)^k$ est bien un polynôme de degré $2n-0$ ayant pour coefficient dominant 1.

Hérédité. — Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée. Alors $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$ donc il existe $Q \in \mathbf{R}_{2n-k-1}[X]$ tel que :

$$U_n^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q,$$

donc :

$$\begin{aligned} U_n^{(k+1)} &= \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right)(2n-k)X^{2n-k-1} + Q' \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k}(2n-i)\right) X^{2n-k-1} + \underbrace{Q'}_{\in \mathbf{R}_{2n-k-2}[X]} \end{aligned}$$

donc $U_n^{(k+1)}$ est bien un polynôme de degré $2n-(k+1)$ et de coefficient dominant $\prod_{i=0}^{k+1-1}(2n-i)$. On a bien HR_{k+1}.

Conclusion. — D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$.

Par suite, $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$ est de degré $2n-n = n$ et a pour coefficient dominant :

$$a_n = \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=0}^{n-1}(2n-i) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=n+1}^{2n} i = \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}.$$

■

Q3. — La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre (théorème des degrés échelonnés) et elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbf{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

■

Q4. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, donc U_n a deux racines, -1 et 1, de multiplicité n.

Comme $U_n = (X^2-1)^n$, $U_n' = n(2X)(X^2-1)^{n-1} = 2n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-0)$, donc, en prenant $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0 \in]-1, 1[$, on a bien

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

■

Q5. — On supposera de plus, quitte à renuméroter, que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$.

Alors, comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k \geqslant 1$ de $U_n^{(k)}$, -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k-1$ de $(U_n^{(k)})' = U_n^{(k+1)}$, donc il existe donc $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}Q$.

Comme $\deg\left(U_n^{(k+1)}\right) = 2n-k-1$ et $\deg\left((X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}\right) = 2n-2k-2$, on a $\deg(Q) = k+1$.

Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Alors on a $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$.

Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, dérivable sur $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ (fonction polynomiale) et $U_n^{(k)}(\alpha_{k-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_k) \quad (=0)$.

Donc, d'après le lhéorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $\left(U_n^{(k)}\right)'(\beta_k) = 0$, i.e. $U_n^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.

On a de plus, par construction :

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1,$$

donc les réels $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+1}$ sont deux à deux distincts.

Pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = \underbrace{(\beta_i - 1)^{n-1}(\beta_i + 1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \beta_i \neq \pm 1} Q(\beta_i)$, donc, comme $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$, on a $Q(\beta_i) = 0$, et donc β_i est une racine de Q.

Q est un polynôme de degré $k+1$ qui admet pour racines (distinctes) $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$, donc il existe $\nu \in \mathbf{R}$ tel que $Q = \nu(X - \beta_1)\cdots(X - \beta_{k+1})$. Ainsi :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

■

Q6. — Les questions 4 (initialisation pour $k = 1$) et 5 (hérédité pour $k \in [\![1, n-1]\!]$) permettent de démontrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ_k tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu_k (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

En particulier, pour $k = n$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ_n tels que :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n), \end{aligned}$$

donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de L_n et toutes ces racines sont dans $]-1, 1[$.

■

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11 **ÉNONCÉ**

Q1. — Soit $P \in \mathbf{R}_0[X]$. On écrit $P = c$, où $c \in \mathbf{R}$.

Recherche d'une condition nécessaire. Supposons qu'il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$. En spécialisant à $X \leftarrow 0$, nous obtenons :

$$c = P(0) = A(0)^2 + B(0)^2 .$$

Comme A et B sont des polynômes à coefficients réels, $A(0)$ et $B(0)$ appartiennent à $\mathbf{R}$. Donc $c \geqslant 0$.

Vérification que la condition nécessaire est suffisante. Supposons $c \geqslant 0$. Alors en posant $A = \sqrt{c} \in \mathbf{R}[X]$ et $B = 0 \in \mathbf{R}[X]$, nous obtenons $P = A^2 + B^2$.

Conclusion. Le polynôme constant $P = c$ est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si $c \geqslant 0$.

■

Q2. — Soit $P = a_1 X + a_0$, où $a_1 \in \mathbf{R}^*$ et $a_0 \in \mathbf{R}$.

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons donc que P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$, i.e. qu'il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Comme A et B sont des polynômes à coefficients réels, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $A(x) \in \mathbf{R}$ et $B(x) \in \mathbf{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$P(x) = a_1 x + a_0 = A(x)^2 + B(x)^2 \geqslant 0 .$$

- Si $a_1 > 0$, alors $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. Contradiction.
- Si $a_1 < 0$, alors $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. Contradiction.

Dans tous les cas, nous avons obtenu une contradiction.

■

Q3. — Soit $P = X^2 + a_1 X + a_0$, où $(a_1, a_0) \in \mathbf{R}^2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$, i.e. qu'il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
Comme A et B sont des polynômes à coefficients réels, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $A(x) \in \mathbf{R}$ et $B(x) \in \mathbf{R}$. Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geqslant 0 .$$

Nous en déduisons que P ne possède pas deux racines réelles distinctes, sinon la fonction polynomiale associée à P n'aurait pas un signe constant sur $\mathbf{R}$. Ainsi $\Delta(P) \geqslant 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\Delta(P) = a_1^2 - 4a_0 \leqslant 0$. Nous écrivons P sous forme canonique :

$$P = \left(X + \frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = \left(X + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \frac{\overbrace{4a_0 - a_1}^{=-\Delta(P) \geqslant 0}}{4} = \left(X + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta(P)}}{2}\right)^2 .$$

Donc si on pose $A := X + \dfrac{a_1}{2} \in \mathbf{R}[X]$ et $B =: \dfrac{\sqrt{-\Delta(P)}}{2} \in \mathbf{R}[X]$, alors $P = A^2 + B^2$.

■

Q4. — Par hypothèse, il existe des polynômes A_1, B_1, A_2, B_2 de $\mathbf{R}[X]$ tels que :

$$P_1 = A_1^2 + B_1^2 \quad \text{et} \quad P_2 = A_2^2 + B_2^2 .$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 + B_1 B_2)^2 + (A_1 B_2 - B_1 A_2)^2 &= A_1^2 A_2^2 + B_1^2 B_2^2 + 2A_1 A_2 B_1 B_2 + A_1^2 B_2^2 + B_1^2 A_2^2 - 2A_1 B_2 B_1 A_2 \\ &= \left(A_1^2 + B_1^2\right)\left(A_2^2 + B_2^2\right) \\ &= P_1 P_2 \end{aligned}$$

pour en déduire que $P_1 P_2$ est la somme des carrés de $A_1 A_2 + B_1 B_2 \in \mathbf{R}[X]$ et $A_1 B_2 - B_1 A_2 \in \mathbf{R}[X]$.

■

Q5. — $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que P somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$. Alors il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$. Comme A et B sont des polynômes à coefficients réels, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $A(x) \in \mathbf{R}$ et $B(x) \in \mathbf{R}$. Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geq 0 .$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Nous considérons la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ et scindons l'étude en trois parties, afin d'envisager les différents cas.

(A) Cas où P n'a aucune racine dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (i.e. est scindé sur $\mathbf{R}$). Supposons que :

$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k}$$

où $r \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$ sont des nombres réels et $n_1, \ldots, n_r$ sont des nombres entiers naturels non nuls. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Nous posons

$$\mathscr{V}_k^* := \begin{cases}]-\infty, \alpha_1[\cup]\alpha_1, \alpha_2[& \text{si k=1} \\ ]\alpha_{k-1}, \alpha_k[\cup]\alpha_k, \alpha_{k+1}[& \text{si 1<k<r} \\ ]\alpha_{r-1}, \alpha_r[\cup]\alpha_r, +\infty[& \text{si k=r .} \end{cases}$$

- Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Sur le voisinage épointé $\mathcal{V}_k^*$ de α_k, P est strictement positif et le polynôme $\operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} (X - \alpha_\ell)^{n_\ell}$ ne s'annule pas et garde un signe constant. Nous en déduisons que le polynôme :
$$\frac{P}{\operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} (X - \alpha_\ell)^{n_\ell}} = (X - \alpha_k)^{n_k}$$
garde un signe constant sur le voisinage épointé $\mathcal{V}_k^*$ de α_k. Donc n_k est un entier pair. Écrivons $n_k = 2 \cdot m_k$, où $m_k \in \mathbf{N}$. Alors
$$(X - \alpha_k)^{n_k} = \left((X - \alpha_k)^{m_k}\right)^2 + 0^2$$
est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.
- Comme
$$0 < P(\alpha_r + 1) = \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} \underbrace{\left((\alpha_r + 1 - \alpha_k)^{m_k}\right)^2}_{>0}$$
nous savons $\operatorname{dom}(P) > 0$. D'après la question 1, $\operatorname{dom}(P)$ est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

Des deux résultats précédents et de la question 4, nous déduisons que P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

(B) Cas où P n'a aucune racine dans $\mathbf{R}$. Supposons que :
$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + a_\ell X + b_\ell)^{m_\ell}$$
où $s \in \mathbf{N}^*$, , $m_1, \ldots, m_s$ sont des entiers non nuls et $(a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s)$ sont des couples deux-à-deux distincts de réels tels que pour tout $\ell \in [\![1, s]\!]$, $a_\ell^2 < 4b_\ell$.

- D'après la question 3, pour tout $\ell \in [\![1, s]\!]$, le polynôme $X^2 + a_\ell X + b_\ell$ est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.
- Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$$\prod_{\ell=1}^{s} (x^2 + a_\ell x + b_\ell)^{m_\ell} > 0$$
et $P(x) > 0$, il vient $\operatorname{dom}(P) > 0$. D'après la question 1, $\operatorname{dom}(P)$ est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

Des deux résultats précédents et de la question 4, nous déduisons que P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

(C) Cas où P a une racine dans $\mathbf{R}$ et une racine dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Supposons que :
$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k} \cdot \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + a_\ell X + b_\ell)^{m_\ell}$$
où r et s sont des entiers naturels non nuls, $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s$ sont des entiers non nuls, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont des réels deux-à-deux distincts, $(a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s)$ sont des couples deux-à-deux distincts de réels tels que pour tout $\ell \in [\![1, s]\!]$, $a_\ell^2 < 4b_\ell$.

- Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$$\prod_{\ell=1}^{s} (x^2 + a_\ell x + b_\ell)^{m_\ell} > 0$$
il vient :
$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k)^{n_k} \geqslant 0.$$
D'après le cas (A) déjà résolu, le polynôme :
$$\operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k}$$
est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.
- D'après la question 3, pour tout $\ell \in [\![1, s]\!]$, le polynôme $X^2 + a_\ell X + b_\ell$ est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

Des deux résultats précédents et de la question 4, nous déduisons que P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$.

■